

ESTIMACIÓN DE LA ORIENTACIÓN MÚLTIPLE MEDIANTE UN BANCO DE FILTROS Y SU USO EN EL DESARROLLO DE APLICACIONES DE PROCESADO DE IMAGEN



Álvar Ginés Legaz Aparicio
Director: Dr. Rafael Verdú Monedero

DPTO. TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y COMUNICACIONES
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE CARTAGENA

**DOCTORADO EN TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y
LAS COMUNICACIONES**

28 de Mayo de 2019



CONFORMIDAD CON LA PRESENTACIÓN DE LA TESIS Y APORTACIÓN RELEVANTE
DEL CANDIDATO EN LOS ARTÍCULOS QUE COMPONEN LA TESIS

D. Rafael Verdú Monedero, director de la Tesis doctoral “Estimación de la orientación múltiple mediante un banco de filtros y su uso en el desarrollo de aplicaciones de procesado de imagen”, realizada por D. Álar Ginés Legaz Aparicio, dentro del Programa de Doctorado Tecnologías de la Información y las Comunicaciones, declaro mi conformidad con la presentación de la citada tesis por parte del doctorando, así como que la aportación de éste en los artículos que componen la tesis ha sido relevante.

En Cartagena, a 7 de mayo de 2019

EL DIRECTOR DE LA TESIS

Rafael Verdú
Monedero

Fdo.: Rafael Ver

Visto Bueno Coordinador del Programa de Doctorado

JORGE|
LARREY|
RUIZ

**CONFORMIDAD DE SOLICITUD DE AUTORIZACIÓN DE DEPÓSITO DE
TESIS DOCTORAL POR EL/LA DIRECTOR/A DE LA TESIS**

D. Rafael Verdú Monedero, Director/a de la Tesis doctoral “Estimación de la orientación múltiple mediante un banco de filtros y su uso en el desarrollo de aplicaciones de procesamiento de imagen”.

INFORMA:

Que la referida Tesis Doctoral, ha sido realizada por D. Álgar Gínés Legaz Aparicio, dentro del Programa de Doctorado Tecnologías de la Información y las Comunicaciones, dando mi conformidad para que sea presentada ante el Comité de Dirección de la Escuela Internacional de Doctorado para ser autorizado su depósito.

La rama de conocimiento en la que esta tesis ha sido desarrollada es:

- ☐ Ciencias
- ☐ Ciencias Sociales y Jurídicas
- ☒ Ingeniería y Arquitectura

En Cartagena, a 18 de febrero de 2019

EL DIRECTOR DE LA TESIS

VERDU MONEDERO
RAFAEL -

Fdo.: Rafael Verdú

COMITÉ DE DIRECCIÓN ESCUELA INTERNACIONAL DE DOCTORADO

CONFORMIDAD DE DEPÓSITO DE TESIS DOCTORAL
POR LA COMISIÓN ACADÉMICA DEL PROGRAMA

D. Jorge Larrey Ruiz, Presidente de la Comisión Académica del Programa de Doctorado
TECNOLOGÍAS DE LA INFORMACIÓN Y LAS COMUNICACIONES

INFORMA:

Que la Tesis Doctoral titulada, “**ESTIMACIÓN DE LA ORIENTACIÓN MÚLTIPLE MEDIANTE UN BANCO DE FILTROS Y SU USO EN EL DESARROLLO DE APLICACIONES DE PROCESADO DE IMAGEN**”, ha sido realizada, dentro del mencionado Programa de Doctorado, por **D. Álgar Gínés Legaz Aparicio**, bajo la dirección y supervisión del **Dr. Rafael Verdú Monedero**.

En reunión de la Comisión Académica, visto que en la misma se acreditan los indicios de calidad correspondientes y la autorización del Director de la misma, se acordó dar la conformidad, con la finalidad de que sea autorizado su depósito por el Comité de Dirección de la Escuela Internacional de Doctorado.

La Rama de conocimiento por la que esta tesis ha sido desarrollada es:

- ☐ Ciencias
- ☐ Ciencias Sociales y Jurídicas
- ☒ Ingeniería y Arquitectura

En Cartagena, a 9 de mayo de 2019

EL PRESIDENTE DE LA COMISIÓN ACADÉMICA

JORGE|
LARREY|
RUIZ

Firmado digitalmente por JORGE|
LARREY|RUIZ
Nombre de reconocimiento (DN):

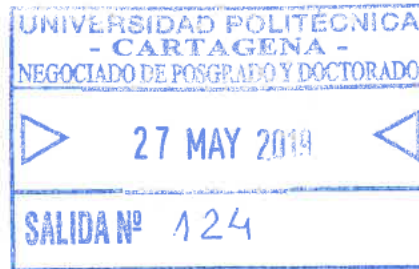
RUIZ, ou=Ciudadanos, o=ACCV,
c=ES
Fecha: 2019.05.09 14:26:50
+0200

Fdo: **D. Jorge Larrey Ruiz**

COMITÉ DE DIRECCIÓN ESCUELA INTERNACIONAL DE DOCTORADO



Universidad
Politécnica
de Cartagena



Sr. D. Álvaro Ginés Legaz Aparicio

Visto el informe favorable del Director de Tesis y el Vº Bº de la Comisión Académica del Programa de Doctorado “Tecnologías de la Información y las Comunicaciones” para la presentación de la Tesis Doctoral titulada: **“Estimación de la orientación múltiple mediante un banco de filtros y su uso en el desarrollo de aplicaciones de procesamiento de imagen”** solicitada por D. ÁLVAR GINÉS LEGAZ APARICIO, el Comité de Dirección de la Escuela Internacional de Doctorado de la Universidad Politécnica de Cartagena, en reunión celebrada el 27 de mayo de 2019, considerando lo dispuesto en el artículo 23 del Reglamento de Estudios Oficiales de Doctorado de la UPCT, aprobado en Consejo de Gobierno el 17 de diciembre de 2015,

ACUERDA

Autorizar la presentación de la Tesis Doctoral a D. Álvaro Ginés Legaz Aparicio en la modalidad de “compendio de publicaciones”.

Contra el presente acuerdo, que no agota la vía administrativa, podrá formular recurso de alzada ante el Sr. Rector-Magnífico de la Universidad Politécnica de Cartagena, en el plazo de un mes a partir de la notificación de la presente.

Cartagena, 27 de mayo de 2019

EL DIRECTOR DE LA ESCUELA
INTERNACIONAL DE DOCTORADO



Fdo.: Pablo S. Fernandez Escamez

Nombre: Álvar Ginés Legaz Aparicio **E-mail:** [REDACTED]

Director: Dr. Rafael Verdú Monedero **E-mail:** [REDACTED]

Título: Estimación de la orientación múltiple mediante un banco de filtros y su uso en el desarrollo de aplicaciones de procesamiento de imagen.

Descriptores: Estimación de orientaciones múltiples en imágenes. Morfología matemática. Regularización. B-splines. Análisis de texturas. Filtrado variante en el espacio. Extracción de características.

Titulación: Doctorado en Tecnologías de la Información y las Comunicaciones.

Departamento: Tecnologías de la Información y las Comunicaciones.

Fecha de presentación: Diciembre de 2018.

Publicaciones:

Revistas internacionales

1. A.G. Legaz-Aparicio, R. Verdú-Monedero, J. Angulo, "Multiscale Estimation of Multiple Orientations based on Morphological Directional Openings", *Signal, Image and Video Processing*, 2018, Vol. 12, pp. 1245-1253, October, 2018, (doi:10.1007/s11760-018-1276-y). **ISI-JCR(2017): 1.643, Posición 163 de 260 (T2, Q3), cat ENGINEERING, ELECTRICAL & ELECTRONIC.**
2. A.G. Legaz-Aparicio, R. Verdú-Monedero, K. Engan, "Noise Robust and Rotation Invariant Framework for Texture Analysis and Classification", *Applied Mathematics and Computation*, Volume 335, pp. 124 a 132, October 2018. **ISI-JCR(2017): 2.300, Posición 21 de 252 (T1, Q1), cat MATHEMATICS, APPLIED.**
3. A.G. Legaz-Aparicio, R. Verdú-Monedero, J. Angulo, "Adaptive morphological filters based on a multiple orientation vector field dependent on image local features", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 330, pp. 965-981, March 2018. **ISI-JCR(2017): 1.632, Posición 49 de 252 (T1, Q1), cat MATHEMATICS, APPLIED.**
4. S. Morales, V. Naranjo, J. Angulo, A.G. Legaz-Aparicio, R. Verdú-Monedero, "Retinal

network characterization through fundus image processing: significant point identification on vessel centerline", *Signal Processing: Image Communication*, Vol. 59, pp. 50-64, November 2017. **ISI-JCR(2017): 2.073, Posición 118 de 260 (T2, Q2), cat ENGINEERING, ELECTRICAL & ELECTRONIC.**

5. Álgvar-Ginés Legaz-Aparicio, R Verdú-Monedero, J Larrey-Ruiz et al., "Efficient Variational Approach to Multimodal Registration of Anatomical and Functional Intra-Patient Tumorous Brain Data", *International journal of neural systems*, Vol. 2017, pp. 1-11, 2017. **SI-JCR(2017): 4.580, Posición 13 de 132 (T1, Q1), cat COMPUTER SCIENCE, ARTIFICIAL INTELLIGENCE.**
6. V. Naranjo, S. Morales, A. Legaz-Aparicio, J. Larrey-Ruiz, A. Bernabeu, F. Fuentes-Hurtado, "A software for surgical and radiotherapy planning through multimodal brain image registration and fusion". *International Journal of Computer Assisted Radiology and Surgery*, vol. 10, sup. 1, pp. S15-S17, 2015. **ISI-JCR(2015): 1.827, Posición 79 de 200 (T2, Q2), cat SURGERY.**

Congresos internacionales

1. Álgvar-Ginés Legaz-Aparicio, Rafael Verdú-Monedero, Jesús Angulo, "Adaptive spatially variant morphological filters based on a multiple orientation vector field", *Mathematical modelling in Engineering & Human Behaviour* 2016.
2. R.M. Menchón-Lara, J.L. Sancho-Gómez, A. Sánchez-Morales, Á. Legaz-Aparicio, J. Morales-Sánchez, R. Verdú-Monedero, J. Larrey-Ruiz, "Using Machine Learning Techniques for the Automatic Detection of Arterial Wall Layers in Carotid Ultrasounds", *6th International Symposium on Ambient Intelligence (ISAmI 2015)*, Salamanca (Spain), June 2015.
3. Álgvar-Ginés Legaz-Aparicio, Rafael Verdú-Monedero, Jorge Larrey-Ruiz, Fernando López-Mir, Valery Naranjo, and Ángela Bernabéu, "Multimodal 3D Registration of Anatomic (MRI) and Functional (fMRI and PET) intra-Patient Images of the Brain", *6th International Work-Conference on the Interplay between Natural and Artificial Computation (IWINAC 2015)*, Elche (Spain), June 2015.
4. R. Berenguer-Vidal, R. Verdú-Monedero, Á Legaz-Aparicio, "Dynamic Modelling of the Whole Heart Based on a Frequency Formulation and Implementation of Parametric Deformable Models", *6th International Work-Conference on the Interplay between Natural and Artificial Computation (IWINAC 2015)*, Elx (Spain), June 2015.
5. S. Morales, Á. Legaz-Aparicio, V. Naranjo, R. Verdú-Monedero, "Determination of Bifurcation Angles of the Retinal Vascular Tree through Multiple Orientation Estimation

based on Regularized Morphological Openings", *International Conference on Bio-inspired Systems and Signal Processing (BIOSIGNALS 2015)*, Lisbon (Portugal), January 2015.

6. Álar-Ginés Legaz-Aparicio, Rafael Verdú-Monedero, Juan Morales-Sanchez, Jorge Larrey-Ruiz, Jesús Angulo, "Detection of Retinal Vessel Bifurcation by Means of Multiple Orientation Estimation Based on Regularized Morphological Openings". *XIII Mediterranean Conference on Medical and Biological Engineering and Computing*, Sevilla, 2013.
7. Rafael Berenguer-Vidal, Rafael Verdú-Monedero, Rosa-María Menchón-Lara, Álar Legaz-Aparicio, "Comparison of finite difference and B-spline deformable models in characterization of 3D data", *5th International Work-Conference on the Interplay between Natural and Artificial Computation (IWINAC 2013)*, Mallorca, Balearic Islands (Spain), June 2013.

Congresos nacionales

1. Á.G. Legaz-Aparicio, R. Verdú-Monedero, J. Larrey-Ruiz, F. López-Mir, V. Naranjo, A. Bernabeu, "Registro 3D multimodal de imágenes anatómicas (MRI) y funcionales (fMRI y PET) intra-paciente del cerebro", *XXXII Congreso Anual de la Sociedad Española de Ingeniería Biomédica (CASEIB 2014)*, Barcelona (Spain), Nov. 2014.
2. Á. Legaz-Aparicio, R. Verdú-Monedero, J. Angulo, "Detección de Bifurcaciones en la Retina mediante Estimación de Orientaciones Múltiples basada en Aperturas Morfológicas Regularizadas", *XXIX Simposium Nacional de la Unión Científica Internacional de Radio (URSI 2014)*, Valencia (Spain), Sep. 2014.
3. Álar Ginés Legaz Aparicio, M^a Consuelo Bastida Jumilla, Rosa M^a Menchón Lara, Rafael Verdú Monedero, Juan Morales Sánchez, "Análisis en bloques de imágenes para estimación de orientaciones múltiples usando aperturas direccionales y B-splines". *VI Jornadas de Introducción a la Investigación de la UPCT*, 2013.
4. Rosa María Menchón Lara, María Consuelo Bastida Jumilla, Álar Ginés Legaz Aparicio, José Luis Sancho Gómez, Jorge Larrey Ruiz. "Aprendizaje Máquina aplicado a la Evaluación Automática del Grosor Íntima-Media Carotídeo en Imágenes de Ultrasonido". *VI Jornadas de Introducción a la Investigación de la UPCT*, 2013.

Agradecimientos

Antes que nada me gustaría transmitir mi gratitud a todas esas personas que han hecho posible la culminación de esta Tesis Doctoral.

En primer lugar, quiero agradecer al Dr. D. Rafael Verdú Monedero, Profesor Titular de la *Universidad Politécnica de Cartagena* y director de este trabajo toda la dedicación, esfuerzo y paciencia que ha mostrado durante todo el proceso que culmina en esta Tesis. Ha sido un auténtico placer todo lo aprendido durante este periodo y todo el tiempo compartido.

También me gustaría agradecer a la Dra. D.^a Valery Naranjo Ornedo y los compañeros del *Instituto Interuniversitario de Investigación en Bioingeniería y Tecnología Orientada al Ser Humano - LabHuman* por hacer posible mediante diferentes colaboraciones y proyectos mi dedicación como investigador. A la Dra. D.^a Kjersi Engan por concederme la oportunidad de realizar mi estancia doctoral en la *Universidad de Stavanger* y a todos los compañeros del *Grupo de Tratamiento de Datos y Aprendizaje Máquina* por todo el trabajo compartido.

A mi padre Ginés y a mi hermana Rocío que han estado a mi lado en todo momento animándome, a su manera, a seguir adelante. No quiero olvidarme también de Sergio, Manuel y José a ellos también les debo todos esos momentos compartidos durante este proceso.

Y por último, a Amparo, que con su incansable esfuerzo y apoyo ha hecho posible todo esto. A ella le dedico esta Tesis.

El trabajo de esta Tesis ha estado financiado parcialmente por el Ministerio de Economía, Industria y Competitividad (Proyecto PI17/00771) y la Universidad Politécnica de Valencia - Instituto Interuniversitario de Investigación en Bioingeniería y Tecnología Orientada al Ser Humano. Labhuman- conjuntamente con la Universidad Politécnica de Cartagena (Proyectos 4106/15TIC y 3626/13TIC).

Índice

1	Resumen	1
1.1	Summary	2
2	Introducción y estado del arte	3
2.1	Concepto de estructura	3
2.2	Orientación de las estructuras	4
2.3	Aplicaciones de la estimación de la orientación	7
2.3.1	Procesado de huellas dactilares	7
2.3.2	Análisis de texturas	8
2.3.3	Corrección de imágenes	9
2.3.4	Calibración de cámaras	9
2.3.5	Detección de esquinas, bifurcación y cruces	9
2.3.6	Filtrado variante en el espacio	10
2.3.7	Estimación de movimiento	11
2.3.8	Navegación	13
2.4	Métodos de estimación de orientación	13
2.4.1	Estimación de la orientación simple	14
2.4.2	Estimación de la orientación múltiple	18
2.5	Difusión de la información de las orientaciones	23
2.6	Objetivos, motivación y organización de esta Tesis	25
3	Compendio de artículos	27
3.1	Artículo 1	29
3.2	Artículo 2	31
3.3	Artículo 3	33
3.4	Artículo 4	35
3.4.1	Detección de bifurcaciones y cruces	36
3.4.2	Caracterización de bifurcaciones y cruces	37
3.5	Artículo 5	37
3.6	Artículo 6	41
3.7	Artículo 7	44

4 Conclusiones y trabajo futuro	51
4.1 Conclusiones	51
4.1.1 Trabajo futuro	53
4.2 Conclusions and future work	53
4.2.1 Future work	55
Bibliografía	57
Compendio de artículos	65

1 Resumen

En las últimas décadas, la estimación de orientación se ha convertido en una tarea clave del procesamiento de imagen, dada su capacidad para extraer características de bajo nivel y su aplicación en el análisis de datos. Existen un gran número de aplicaciones donde la estimación de orientación juega un papel fundamental como son: el análisis de huellas dactilares, extracción de puntos característicos, bifurcaciones, esquinas o intersecciones, filtrado adaptativo o seguimiento de objetos, entre otras.

Sin embargo, con el paso del tiempo han aparecido diferentes problemas asociados a la estimación de orientación que pueden complicar este proceso. Los más importantes a destacar son los siguientes: las limitaciones que presentan muchos de los métodos de estimación en estructuras complejas, por ejemplo, estructuras con varias orientaciones asociadas, el incremento de la complejidad computacional de los métodos más modernos o la dependencia de éstos a solo unas determinadas aplicaciones. Resulta en estos momentos, por tanto, una tarea clave conseguir métodos de estimación que sean lo más globales y genéricos posibles, en otras palabras, lo más independientes del tipo de imagen con la que se trabaje y del campo de aplicación.

En esta Tesis doctoral, en primer lugar, se aborda una revisión de los conceptos más importantes de la estimación de orientación, como es el concepto de estructura, orientación y sus propiedades principales. También se describen los métodos de estimación de orientaciones más importantes: tensor estructural, bancos de filtros, gradiente al cuadrado promediado, etc. Y las aplicaciones más importantes como la detección de texturas, extracción de características, análisis de huellas dactilares, filtrado variante o seguimiento de objetos, entre otras.

Las contribuciones principales a esta Tesis son dos. En primer lugar, la propuesta de un marco de trabajo (de estimación de orientaciones) capaz de sistematizar el proceso de estimación de orientaciones, independientemente del tipo de estructuras o el tipo de aplicación. El marco propuesto está basado en una de las técnicas de estimación de orientación más usadas, los bancos de filtros. Durante este trabajo, éstos han sido probados en multitud de escenarios mientras se consideraban diferentes familias de filtros para su aplicación. En segundo lugar, se abordan casos prácticos de aplicación del marco de trabajo propuesto con el objetivo de mostrar sus excelentes capacidades en aplicaciones muy dispares, mostrando su potencial en multitud de posibilidades.

Dado que el método de presentación de la presente Tesis doctoral es mediante un compendio de artículos, la organización de esta memoria constará de un primer capítulo de introducción y estado del arte. Seguidamente se mostrarán, de forma coherente y organizada, los artículos con los resultados obtenidos durante el periodo de investigación de la Tesis, con una introducción para cada uno de los artículos incluidos en este compendio. Finalmente el capítulo de conclusiones y trabajo futuro cierra la Tesis.

1.1. Summary

In the last decades, image orientation estimation has become in a fundamental task of image processing, due to its ability to extract low level features and its application to data analysis. There are a wide number of applications where the image orientation estimation plays an important role, some of these are: fingerprint analysis, feature extractions such as bifurcation, junction and corner, adaptive filtering or tracking applications.

However, with the pass of time, different problems related to orientation estimation have appeared and they can complicate this process. The most important problems to highlight are: difficult of a wide number of methods to estimate the orientation of complex object structures, for example, structures with multiple orientations associated, high computational cost of modern methods or dependence on the application framework. Therefore, nowadays, the obtention of global and generic methods, in other words, methods as independent as possible from the image and the application, has become in an important task. In this Thesis, firstly, a review of main concepts of image orientation have been carried out, such as the concept of structure, orientation and their main properties. The most important methods have been described, as e.g., structural tensor, bank of filters, average square gradient, etc. And the most important applications based on image orientation estimation as texture analysis, feature extraction, fingerprint analysis, object tracking and space variant filtering, among others.

The main contributions to this Thesis are two. First one is the proposal of a new framework for image orientation estimation, which can systematize this process, making it independent of image type and application. The proposed framework is based on one of the most used estimation orientation techniques, the bank of filters. Throughout this work, it has been tested in a wide variety of scenarios, considering different families of filters for their application. Secondly, the proposed framework has been evaluated in practical applications to show its ability and potential.

This Thesis has been carried out by the method of compendium of publications, it has been organized as follows. Chapter one shows an introduction and a review of the state of art. Chapter two shows the journal papers and other contributions done during the research period of this Thesis. Finally, Chapter three shows the conclusion and future work.

2 Introducción y estado del arte

La estimación de la orientación es un campo de estudio bastante amplio, que está siendo tratado de forma ininterrumpida desde hace varias décadas. El interés de esta técnica radica en la gran importancia que presenta en el procesado de imagen, debido a su extenso abanico de aplicaciones. Entre éstas cabe destacar las tareas de visión por computador, la extracción de características, la segmentación, el análisis de texturas, el seguimiento de objeto, etc.

Se denomina estimación de orientación al proceso mediante el cual se obtiene un cálculo de la orientación de los objetos que componen la escena de una imagen. Concretamente, el proceso de estimación se realiza sobre las zonas no homogéneas de la imagen, es decir los contornos de los objetos contenidos en la imagen, conocidos en este ámbito como estructuras. El resultado de este proceso proporciona un campo vectorial con las características de orientación de la imagen, denominado campo vectorial de orientaciones (CVO) o más comúnmente conocido por sus siglas en inglés, OVF (*orientation vector field*).

A lo largo de este capítulo se expondrán los conceptos básicos relacionados con la estimación de orientación, explicando en qué consisten las estructuras de una imagen y el concepto de orientación aplicado al procesado de imagen. Seguidamente se abordarán las aplicaciones más representativas de la estimación de orientación, así como los métodos de estimación de orientación más utilizados. El resto de capítulos se organizan de la siguiente forma: el Capítulo 3 recoge todas las publicaciones realizadas por el doctorando a lo largo del periodo investigador relacionadas con el tema de la presente Tesis y el Capítulo 4 aportará las conclusiones y líneas futuras de este trabajo.

2.1. Concepto de estructura

Como ya se ha comentado en el resumen de esta Tesis doctoral, el objetivo de la estimación de orientación es disponer de un campo vectorial con la información de la orientación de los objetos contenidos en una imagen. Cada objeto de una imagen se puede considerar como la unión de diferentes regiones homogéneas, los cuales en este ámbito son denominados como contornos o estructuras. Matemáticamente se pueden definir los contornos de una imagen como aquellos pí-

xeles de una imagen $s(\mathbf{x})$ cuya derivada es diferente de cero $\frac{\partial s(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \neq 0$. Sin embargo para imágenes reales donde se encuentra presente ruido, reflejos, sombras o degradados es más preciso definir las estructuras como los píxeles de una imagen cuya derivada en alguna dirección, o módulo de la derivada, es superior a cierto umbral establecido $\frac{\partial s(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} > th$, el cual dependerá del tipo de imagen y el campo de aplicación.



Figura 2.1: (a) Imagen original, (b) imagen formada por los contornos de la imagen anterior, la cual ha sido obtenida calculando el valor absoluto del gradiente de la imagen, (c) imagen binaria producto de la umbralización de los contornos de (b).

2.2. Orientación de las estructuras

Dar una definición del concepto de orientación puede parecer una tarea bastante trivial, sin embargo al estar basada en la percepción visual resulta bastante difícil proponer una definición universal de orientación en imágenes. Un ejemplo bastante representativo de este problema es descrito por Perona en [49] donde explica que los métodos empleados tradicionalmente para realizar la difusión de la orientación presentaban errores bastante significativos, producto de no utilizar una adecuada definición de la orientación.

Debido a estos motivos, previamente a dar una definición de orientación, es importante analizar sus características en imágenes. De acuerdo con Michelet *et al.* en [42], la orientación en imágenes presenta cuatro características fundamentales:

- La orientación está estrechamente relacionada con el gradiente, y por tanto no existe en cualquier punto de una imagen. Por ejemplo, en el caso de imágenes uniformes no es posible realizar una estimación de orientaciones. Por tanto, la orientación solo existe en las zonas de imagen con gradiente, ya que son las que contienen las estructuras de una imagen. Un ejemplo visual puede encontrarse en la Figura 2.2, donde se muestran dos imágenes, la pri-

mera corresponde a una zona homogénea donde no es posible realizar una estimación de orientación, la segunda imagen está formada por la unión de dos zonas homogéneas, siendo posible realizar una estimación de orientación en los píxeles correspondientes a la interfase entre zonas, que es la que presenta un cierto gradiente.



Figura 2.2: Imagen homogénea respecto a imagen no homogénea.

- La escala considerada tiene una gran influencia en la percepción de la orientación. Según la escala sobre la que se analice la imagen pueden existir diferentes orientaciones. Visualmente este concepto se muestra en la Figura 2.3, como puede observarse en la Figura 2.3.(a) existe una orientación predominante respecto al resto. Sin embargo, al cambiar la escala en la Figura 2.3.(b) se puede observar que ya no existe una única orientación predominante.



Figura 2.3: Estimación de orientación en diferentes escalas.

- Las estructuras pueden tener una única orientación predominante o presentar diferentes orientaciones predominantes. A la orientación estimada en estructuras con una única orientación predominante se la denomina orientación simple mientras que a la orientación estimada en estructuras con varias orientaciones predominantes se la denomina orientación múltiple. Un ejemplo de orientación múltiple son las intersecciones entre varias estructuras con orientación simple, algunos ejemplos son las esquinas, las bifurcaciones o los cruces de estructuras, tal y como se muestra en la Figura 2.4.
- La periodicidad de las orientaciones depende del tipo de estructuras sobre las que se trabaja. Es posible distinguir entre dos tipos de orientaciones: los bordes (transiciones oscuro a claro o claro a oscuro) y las líneas (transiciones oscuro-claro-oscuro o viceversa), mientras que los



(a)

Figura 2.4: Imagen con orientación múltiple formada por la unión de estructuras con orientación simple.

bordes son periódicos cada 360 grados las líneas lo son cada 180 grados. Un ejemplo visual se puede encontrar en la Figura 2.5.

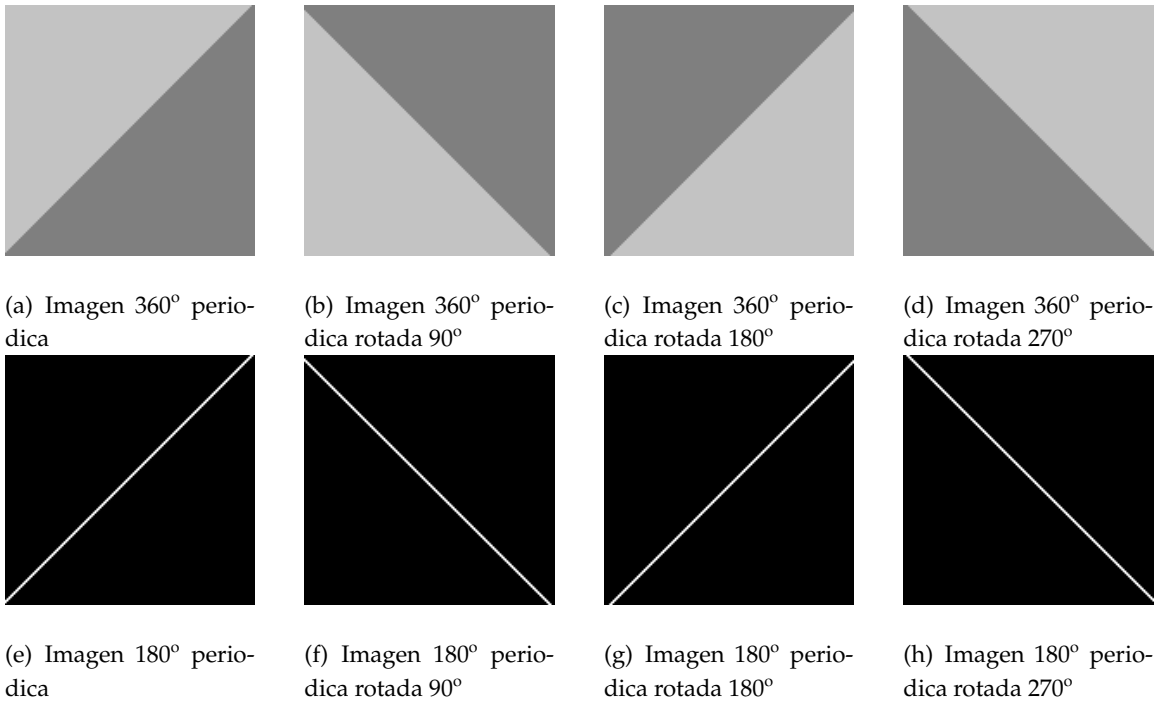


Figura 2.5: Comparativa entre imágenes periódicas 360° respecto a imágenes periódicas 180°.

Basándose en estas características se han propuesto diferentes aproximaciones para definir la orientación. Entre las más importantes destacan la aproximación utilizada por Kass y Witkin [30], Bigün [10], entre otros y propone que:

Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$ una variable de un espacio N -dimensional, denotamos \mathbf{x} como $\mathbf{x} = [x_1, x_2, \dots, x_n]^T$, o para el caso concreto de imágenes donde la dimensión es $N = 2$, $\mathbf{x} = [x_1, x_2]^T$. Una señal multivariante $s(\mathbf{x})$ se considera localmente orientada en una región Ω si esta señal es

constante a lo largo de una dirección, es decir,

$$s(\mathbf{x} + \lambda \mathbf{u}) = s(\mathbf{x}) \text{ para todo } \lambda \in \mathbb{R}, \mathbf{x}, \mathbf{x} + \lambda \mathbf{u} \in \Omega, \quad (2.1)$$

donde \mathbf{u} es un vector unitario que denota la orientación.

Esta es una definición bastante simple que puede dar lugar a los errores mencionados anteriormente si no se tiene en cuenta la periodicidad y el tipo de estructuras que contiene la imagen con la que se trabaja.

Existen otras muchas formas de definir la orientación, como la presentada por Granlund y Knutsson en [24]. Esta definición está basada en la cuarta característica presentada anteriormente y asocia las orientaciones con un punto en un círculo, de manera que se distingue entre dos tipos de orientaciones: los bordes (transiciones oscuro a claro ó claro a oscuro) y las líneas (transiciones oscuro-claro-oscuro ó viceversa), mientras que los bordes son periódicos cada 360° , las líneas lo son cada 180° .

Para la realización de esta Tesis, tanto el marco teórico de estimación propuesto como en los ejemplos de aplicación, se trabajan sobre los contornos de los objetos contenidos en las imágenes asumiendo que todos los objetos están formados por la unión de diferentes estructuras lineales periódicas 180° . Por tanto, bajo estas condiciones, la definición de orientación utilizada por Kass y Witkin en [30], es válida para nuestro trabajo.

2.3. Aplicaciones de la estimación de la orientación

Tal y como se ha mencionado al principio de este capítulo, la estimación de la orientación presenta gran cantidad de aplicaciones en multitud de campos. A lo largo de esta sección se describen algunas de las aplicaciones más importantes basadas en la estimación de la orientación.

2.3.1. Procesado de huellas dactilares

En las imágenes de huellas dactilares se encuentra posiblemente uno de los mayores campos de aplicación de la estimación de orientación. Originariamente utilizadas en la investigación criminal, las huellas dactilares se han convertido en uno de los indicadores biométricos más importantes, convirtiéndose a lo largo de los años en una herramienta fundamental en gran variedad de aplicaciones de autenticación, control de acceso y seguridad. Morfológicamente, las imágenes de huellas dactilares están formadas por crestas y valles, las crestas corresponden a las curvas negras que marcan los contornos entre los valles, las zonas claras de la imagen.

Dentro de estas aplicaciones, la estimación de orientación resulta bastante útil cuando es aplicada a la extracción marcadores (puntos de interés) que permitan caracterizar de forma inequívoca cada huella [15, 4, 28, 47]. Uno de los marcadores más importantes es la curvatura de los contornos de la huellas dactilares, los cuales permiten caracterizar cada huella mediante la relación espacial que guarda con el resto de contornos. La estimación del campo vectorial de orientaciones de los contornos de una huella dactilar permite caracterizar dicha huella según la distribución y curvatura de los vectores de cada uno de los píxeles del campo así como su orientación respecto a un determinado vecindario.

Por otro lado, la estimación de orientación también ha sido usada para restaurar la estructuras de las imágenes con poca calidad [2, 26, 27, 38]. Un ejemplo del uso de la estimación de la orientación en huellas dactilares se puede observar en la Figura 2.6, donde se consigue la restauración de las estructuras de la imagen por medio del análisis de la orientación.

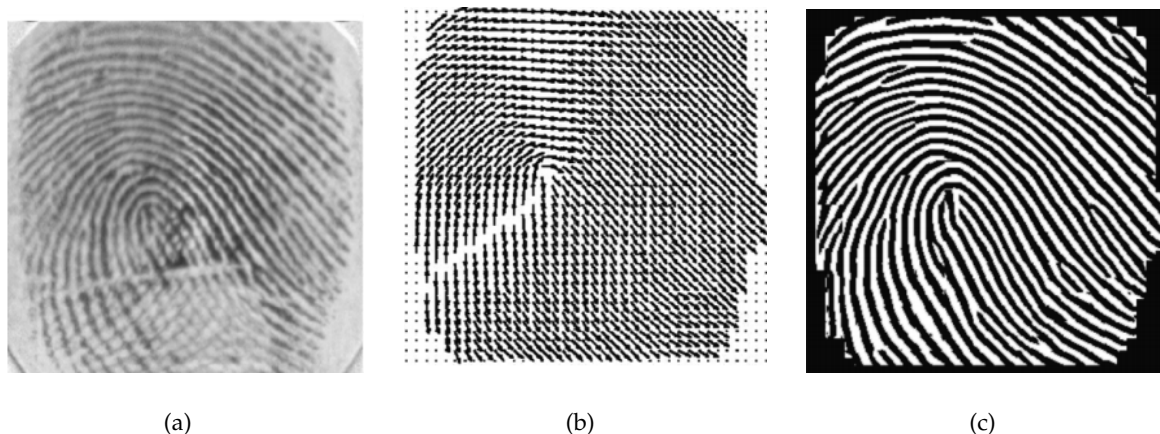


Figura 2.6: (a) Imagen original, (b) campo vectorial de orientaciones, (c) imagen reconstruida con la información del campo vectorial de orientaciones. Imagen extraída de [26].

2.3.2. Análisis de texturas

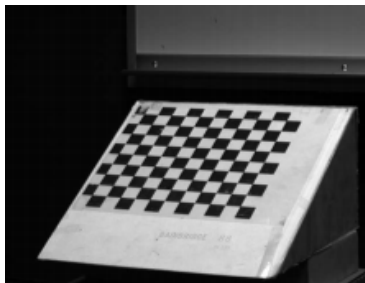
Originariamente, la estimación de orientaciones fue utilizada para el análisis de texturas, donde mediante la búsqueda de discontinuidades en el flujo óptico se conseguía una mejora en el proceso de segmentación, permitiendo una mejor distinción entre objetos en una imagen [46]. En este sentido, a lo largo de los años se han seguido proponiendo diferentes métodos para incorporar la información de la orientación al proceso de segmentación de cara a conseguir mejorar el tiempo de procesado [18].

2.3.3. Corrección de imágenes

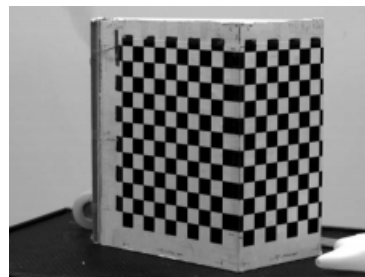
La estimación de orientaciones ha sido ampliamente utilizada para determinar la correcta orientación de las imágenes obtenidas mediante cámaras fotográficas, escáneres o videocámaras. Es muy común que durante el proceso de adquisición y digitalización de imágenes no presenten la correcta orientación espacial o presenten ángulos de rotación respecto a la escena. Estos factores dificultan la visualización de las imágenes por los usuarios, degradan las prestaciones de las herramientas OCR o incrementan el espacio necesario para su almacenamiento. Con el objetivo de solucionar estos problemas, a lo largo de los años han surgido una gran cantidad de métodos de corrección de imágenes basados en estimación de orientación [5, 20, 29].

2.3.4. Calibración de cámaras

La calibración de cámaras es un paso importante en aplicaciones de visión 3D, siendo necesaria para poder extraer información métrica de imágenes 2D. Mediante la estimación de orientación es posible realizar una calibración usando imágenes del tipo tablero de ajedrez (ver Figura 2.7). Al detectar los diferentes cruces que presentan estas imágenes es posible relacionarlos con las posiciones esperadas y de esta forma ajustar los parámetros de la cámara y corregir las distorsiones del sistema óptico [12, 45, 70].



(a)



(b)

Figura 2.7: Diferentes ejemplos de patrones empleados para calibración de cámaras: (a) calibración 2D y (b) calibración (3D). Imagen extraída de [12].

2.3.5. Detección de esquinas, bifurcación y cruces

La detección de esquinas, bifurcaciones y cruces juega un papel fundamental en el procesamiento de imagen y la visión por computador. Ha sido utilizada en un gran número de aplicaciones, entre las más importantes destacan el seguimiento de objetos [21, 56], formación de imágenes estéreo [71], registro de imagen [36, 48, 72] o sistemas de navegación para robots [31, 33, 39]. Otro

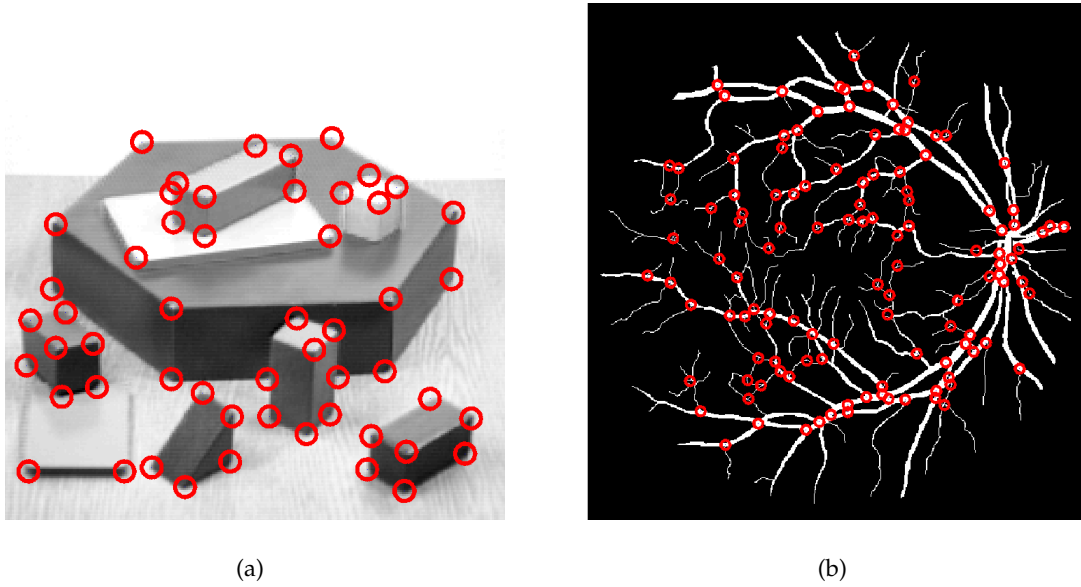


Figura 2.8: Dos ejemplos de métodos de detección de esquinas, bifurcaciones y cruces basados en estimación de orientación.

campo de aplicación bastante interesante es la detección de bifurcaciones y cruces de los vasos de la retina, siendo de gran utilidad para el diagnóstico y seguimiento de múltiples enfermedades cardiovasculares o diabetes [1, 23]. Dentro de este campo podemos encontrar numerosos ejemplos de la aplicación de estimación de orientación. Tanto como para detectar esquinas [45, 54, 68, 69] como para bifurcaciones o cruces [3, 6, 9, 23]. En la Figura 2.8 pueden encontrarse algunos ejemplos de detectores basados en estimación de orientación, en el caso de la Figura 2.8.(a) se observa la respuesta obtenida por el detector de esquinas propuesto Zhang y Shui [69], mientras que la Figura 2.8.(b) se muestra la respuesta del método de detección de bifurcaciones y cruces propuesto en esta Tesis [3].

2.3.6. Filtrado variante en el espacio

En aplicaciones de filtrado variante en el espacio, la estimación de orientaciones ha sido utilizada para construir filtros que adaptan su núcleo espacialmente para ser capaces de reducir el ruido o artefactos en imágenes preservando las estructuras. Es posible distinguir dos familias de filtros adaptativos: los filtros espaciales variantes en el espacio y la difusión anisotrópica. Los filtros espaciales en su versión invariante en el espacio utilizan un determinado núcleo para procesar los píxeles de una imagen y realizar una determinada operación matemática. En el caso variante en el espacio, es posible utilizar la estimación de orientaciones para construir núcleos que varían su forma y orientación con la información direccional de cada pixel [64]. Un ejemplo de estas aplicaciones se observa en la Figura 2.9, donde Verdú *et al.* [62] emplean la información obtenida

con el campo vectorial de orientaciones ASGVF para realizar un filtrado adaptativo. Más reciente, Landström y Thurley emplean morfología matemática para realizar el filtrado variante en el espacio donde los elementos estructurales tienen forma de elipse cuyo tamaño y orientación depende de los autovectores y autovalores obtenidos por el método del tensor estructural [34].

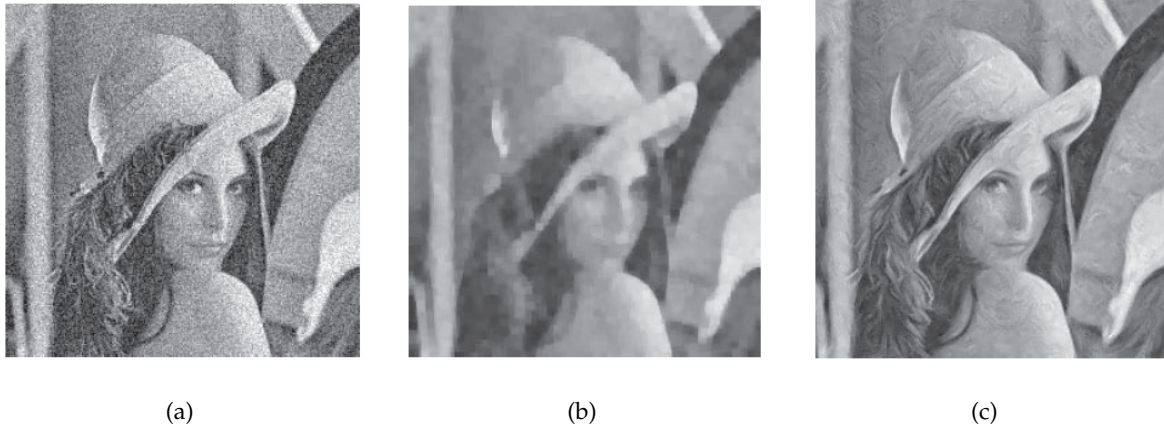


Figura 2.9: (a) Imagen original ruidosa, (b) imagen con un filtro de media invariante en el espacio de tamaño 5×5 (c) imagen filtrada con un filtro de media variante en el espacio. Imagen extraída de [62].

En aplicaciones basadas en difusión anisotrópica, la estimación de la orientación se utiliza para guiar el proceso de difusión según las estructuras de la imagen, de esta forma es posible suavizar las zonas homogéneas de una imagen mientras las estructuras se preservan. Los métodos de difusión anisotrópica, propuestos inicialmente por Perona y Malik [50], están basados en una extensión de la ecuación del calor a la cual se le añade un coeficiente de difusión encargado de limitar la difusión en las zonas cercanas a las estructuras de la imagen. Sin embargo no es posible hablar de difusión anisotrópica guiada por orientación hasta que Weickert [65] sustituyó el coeficiente de difusión por un tensor de difusión, el cual usa la estimación de la orientación para guiar el proceso de difusión en la dirección de las estructuras de la imagen, permitiendo conservar los bordes. En el caso de las zonas homogéneas de la imagen, al no existir orientación predominante, el proceso de difusión es isotrópico, suavizando todos los píxeles por igual. Un ejemplo visual de la difusión anisotrópica guiada por orientación puede encontrarse en la Figura 2.10.

2.3.7. Estimación de movimiento

La estimación de orientaciones múltiples también adquiere su importancia para aplicaciones de estimación del movimiento [25]. Un buen ejemplo de esto se puede encontrar en [57], donde se utiliza una extensión del tensor estructural para el caso de orientaciones múltiples para realizar aplicaciones de seguimiento de objetos. En aplicaciones médicas, la estimación de movimiento puede ser utilizada para mejorar la precisión de los tratamientos médicos como es el caso de las

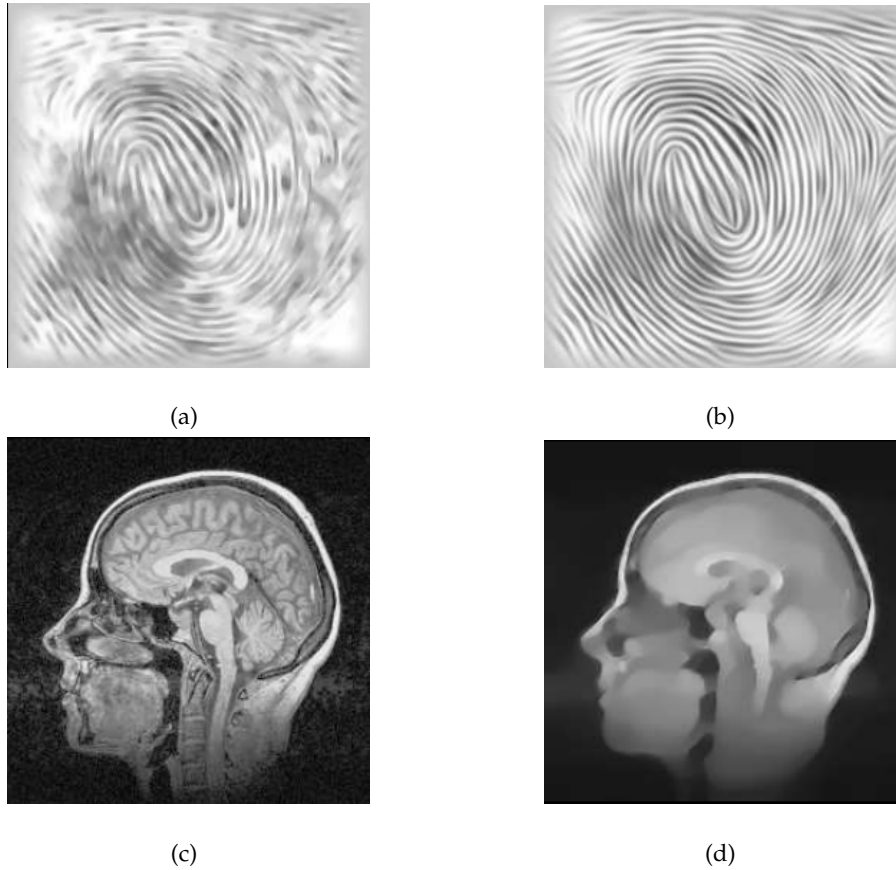


Figura 2.10: (a) Huella dactilar, (b) huella filtrada con difusión anisotrópica, (c) imagen médica del cerebro, (d) imagen médica del cerebro filtrada con difusión anisotrópica. Imágenes extraídas de [65]

técnicas de radiación terapéutica [66, 67]. En la Figura 2.11 se muestra un ejemplo de la estimación de movimiento en una imagen TAC de un tórax.

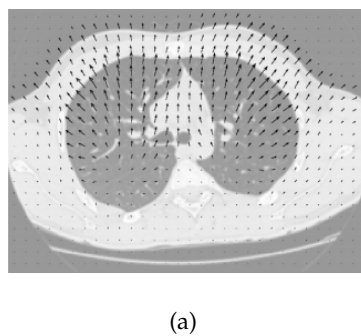


Figura 2.11: Vectores de movimiento 3D estimados en una imagen médica de un tórax mientras el paciente realiza una inhalación. Imagen extraída de [66].

2.3.8. Navegación

En aplicaciones de navegación, la estimación de orientación ha sido ampliamente utilizada para proporcionar diferentes características que ayuden a la navegación de vehículos, principalmente aeronaves. En este ámbito, la detección del horizonte y su orientación respecto a una aeronave resulta muy útil para el ajuste de diferentes parámetros de vuelo, resultando especialmente útil para guiar el vuelo de vehículos aéreos no tripulados (*unmanned aerial vehicles*, UAVs) [7, 11].

La estimación de orientaciones también ha sido utilizada para la navegación en ambientes extremos donde el uso de métodos tradicionales de navegación están bastante limitados. Algunos ejemplos son los vuelos a gran altura o misiones extra-planetarios, donde el posicionamiento GPS queda muy limitado y los mapas están restringidos por la relativamente baja resolución de las imágenes [11, 13].

Por otro lado, la estimación de orientación también puede ser utilizada en combinación con otras técnicas de posicionamiento, como el GPS, para mejorar la precisión de estas. Estas aplicaciones resultan muy útiles para mejorar el posicionamiento en ciudades [16].

2.4. Métodos de estimación de orientación

Para realizar la estimación de orientación se han desarrollado una gran cantidad de técnicas. Inicialmente se propusieron las técnicas de estimación de la orientación simple, que solo eran capaces de estimar una orientación y por tanto su aplicación estaba condicionada a imágenes con estructuras sin bifurcaciones ni cruces. Si bien estos métodos muestran excelentes resultados donde solo existe una orientación predominante, al margen de los posibles errores o ciertas orientaciones secundarias producidas por el ruido. Por el contrario, su aplicación a estructuras con múltiples orientaciones presenta muchas desventajas. Estos problemas pueden ser paliados mediante métodos de estimación más complejos capaces de estimar varias orientaciones para cada punto de una imagen, conocida en este ámbito como estimación de orientaciones múltiples.

A lo largo de esta sección se describen los métodos de estimación más utilizados. En primer lugar abordaremos los basados en orientación simple y concluiremos con los basados en orientación múltiple.

2.4.1. Estimación de la orientación simple

De las técnicas basadas en orientación simple son tres las que se pueden considerar como las más importantes: las basadas en el tensor estructural local, el análisis de componentes principales y el gradiente al cuadrado promediado.

Tensor Estructural Local

El tensor estructural local, (en inglés *local structural tensor, LST*), es una técnica introducida inicialmente por Knutsson [32]. A lo largo de los años se ha convertido en una de las técnicas de estimación de la orientación simple más utilizada. Ha sido citada por multitud de autores, como Kass y Witkin [30], Bigün [10], Mühlich [44] o más recientemente Landström y Thurley [34]. También existe una extensión de la técnica del tensor estructural local para la estimación de orientaciones múltiples [44], en la que se profundizará en siguientes apartados. La definición matemática del tensor estructural local es la siguiente:

Sea $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ las coordenadas del píxel y $f(\mathbf{x})$ el correspondiente valor en escala de grises en la posición \mathbf{x} . El tensor estructural local, $T(\mathbf{x})$, se define como:

$$T(\mathbf{x}) = \begin{pmatrix} T_{x_1 x_1} & T_{x_1 x_2} \\ T_{x_2 x_1} & T_{x_2 x_2} \end{pmatrix}(\mathbf{x}) = G_\sigma * \left(\nabla f(\mathbf{x}) \nabla^\top f(\mathbf{x}) \right), \quad (2.2)$$

y representa las características locales de orientación en los datos, las cuales son dadas por una matriz de 2×2 donde $\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2} \right)$ es el operador gradiente y G_σ denota el núcleo de un filtro de promediado, normalmente este filtro se basa en un núcleo gaussiano y su finalidad es otorgar inmunidad al ruido y reducir el mal condicionamiento que presenta el problema del cálculo de los autovalores.

Para cada píxel se calculan los autovalores (λ_1, λ_2) de la matriz $T(\mathbf{x})$ y los correspondientes autovectores (e_1, e_2). El autovector e_1 representa la dirección de mayor variación de los datos en la región y por tanto al ser e_2 ortogonal, éste representará la dirección de menor variación de los datos en la región [14]. Por otra parte, los autovalores muestran la magnitud de los vectores de dirección, la interpretación de los autovalores es la siguiente:

- $\lambda_1 = \lambda_2 \gg 0$ No hay una dirección dominante, se puede tratar de un cruce o de un punto.
- $\lambda_1 \gg \lambda_2$ Existe una dirección predominante.
- $\lambda_1 = \lambda_2 \approx 0$ No existe ninguna dirección, por tanto se trata de una zona homogénea.

El autovector e_2 apunta en la dirección de menor variación de los datos, es decir e_2 está orientado según los bordes de la estructura que estamos analizando. Por tanto, la orientación en cada píxel se calcula con la siguiente expresión:

$$\phi(\mathbf{x}) = \begin{cases} \arctan\left(\frac{e_{2,x_2}}{e_{2,x_1}}\right), & \text{si } e_{2,x_1}(\mathbf{x}) \neq 0, \\ \frac{\pi}{2}, & \text{si } e_{2,x_1}(\mathbf{x}) = 0, \end{cases} \quad (2.3)$$

siendo $\phi(\mathbf{x})$ la orientación del vector e_2 en un punto \mathbf{x} de la imagen y usando la notación $e_2(\mathbf{x}) = (e_{2,x_1}, e_{2,x_2})(\mathbf{x})$.

Análisis de Componentes Principales

El análisis de componentes principales, (en inglés *principal component analysis PCA*), es una técnica matemática utilizada para reducir la dimensionalidad de un conjunto de datos. La finalidad de esta técnica es encontrar el estimador de máxima verosimilitud (ML) de la orientación local [40]. Aplicado al procesamiento de imágenes permite determinar la distribución de una nube de puntos para obtener la orientación principal de ésta.

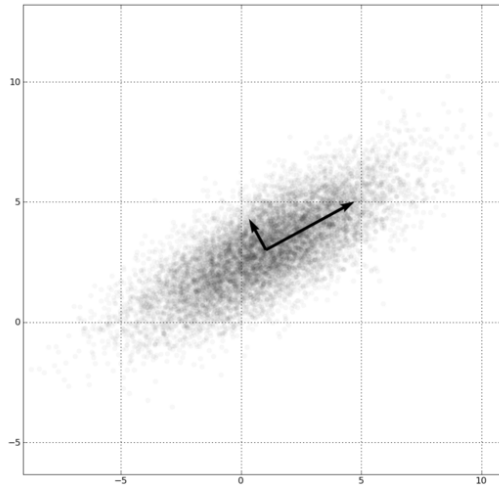


Figura 2.12: Componentes principales de una distribución normal

El cálculo de los componentes principales se puede realizar de dos formas distintas, mediante la descomposición de la matriz de covarianza en sus valores singulares, (en inglés *singular value decomposition, SVD*), o por medio del cálculo de autovectores y autovalores de la matriz de covarianza. En concreto en esta sección se describe la técnica SVD.

Asumiendo que una zona presenta una única orientación homogénea, el cálculo de la orientación consiste en encontrar un vector unitario, \vec{a} , que maximice la diferencia de ángulos θ_i entre

el vector \vec{a} y el vector de gradiente $\vec{g}_i = \nabla f(\mathbf{x}_i)$, $i = 1, \dots, n$, siendo n el número de píxeles considerado. Lo anterior es equivalente a minimizar la siguiente expresión:

$$\sum_{i=1}^n (\vec{a}^T \vec{g}_i)^2 = \vec{a}^T \sum_{i=1}^n (\vec{g}_i \vec{g}_i^T) \vec{a} = \vec{a}^T C \vec{a}, \quad (2.4)$$

donde

$$C = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n g_{x_1}^{(i)} g_{x_1}^{(i)} & \sum_{i=1}^n g_{x_1}^{(i)} g_{x_2}^{(i)} \\ \sum_{i=1}^n g_{x_2}^{(i)} g_{x_1}^{(i)} & \sum_{i=1}^n g_{x_2}^{(i)} g_{x_2}^{(i)} \end{bmatrix} \quad (2.5)$$

sujeto a que $\|\vec{a}\| = 1$, donde $g_{x_1}^{(i)}$ y $g_{x_2}^{(i)}$ son las derivadas espaciales en x_1 y en x_2 , respectivamente. Al ser \vec{a} un vector que apunta a la máxima diferencia de ángulos respecto al gradiente, se trata de un vector que apunta en la dirección de los bordes de la estructura.

Una vez resuelto el problema, obtenemos el vector unitario \vec{a} que minimiza la expresión $\vec{a}^T C \vec{a}$, este es el autovector de C correspondiente al autovalor menor, aun así en [40] se apuesta por utilizar el SVD frente al cálculo de los autovectores y autovalores porque presenta una mayor estabilidad y eficiencia.

Feng y Peyman presentan en [19] una aproximación multiescala de la técnica de PCA descrita por [40]. Esta aproximación presenta una mayor inmunidad al ruido que la técnica tradicional de PCA, también presentan una serie de aplicaciones de estimación de orientaciones con PCA basadas en SVD tanto para imágenes reales como sintéticas (ver Fig 2.13).

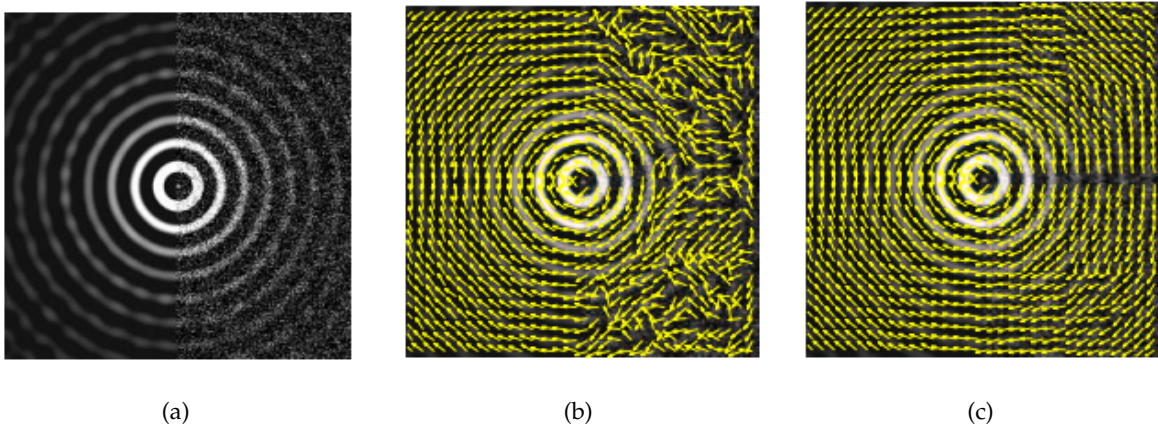


Figura 2.13: (a) Imagen original ruidosa, (b) campo vectorial de orientaciones con PCA, (c) campo vectorial de orientaciones con PCA multiescala. Todas las imágenes extraídas de [19].

Gradiente al cuadrado promediado

La técnica de gradiente al cuadrado promediado, (en inglés *average squared gradient*, ASG), es otra técnica de estimación de la orientación ampliamente utilizada. Mediante el gradiente al cuadrado promediado se obtiene un campo vectorial que indica la orientación de los bordes y contornos de las estructuras en una imagen. La formulación fue presentada en 1987 por Kass y Witkin [30].

El ASG emplea la siguiente definición del gradiente,

$$\mathbf{g} = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2) \\ g_2(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \text{sign} \left(\frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \right) \begin{bmatrix} \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_1} \\ \frac{\partial f(x_1, x_2)}{\partial x_2} \end{bmatrix} \quad (2.6)$$

donde $f(x_1, x_2)$ es una imagen en escala de grises. Esta definición solo tiene en cuenta las orientaciones, y no las direcciones debido a que la definición del gradiente propuesta proporciona un vector de campo cuya primera componente siempre será positiva.

Posteriormente, el gradiente calculado se eleva al cuadrado y se promedia con los vecinos en una ventana W :

$$\bar{\mathbf{g}}_s = \begin{bmatrix} \bar{g}_{s,1}(x_1, x_2) \\ \bar{g}_{s,2}(x_1, x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_W(g_1^2(x, x_2) - g_2^2(x_1, x_2)) \\ \Sigma_W(2g_1(x_1, x_2)g_2(x_1, x_2)) \end{bmatrix}. \quad (2.7)$$

Al elevar al cuadrado un vector, el resultado es otro vector cuyo módulo es el cuadrado del módulo del vector original, y la fase es el doble de la fase del vector original. A consecuencia de esto, los vectores con direcciones opuestas, al elevar al cuadrado, pasan a apuntar en la misma dirección, y los vectores perpendiculares se cancelan. El campo direccional ASG es $\mathbf{d} = [d_1(x_1, x_2) \ d_2(x_1, x_2)]^T$, donde el este ángulo se obtiene como

$$\angle \mathbf{d} = \frac{\Phi}{2} - \text{sign}(\Phi) \frac{\pi}{2}, \quad (2.8)$$

siendo $\Phi = \angle \bar{\mathbf{g}}_s$. Este ángulo será 180°-periódico, ya que estamos estimando la orientación sobre el gradiente de la imagen y éste nos dará los contornos de los objetos sobre los que estimar la orientación, una explicación más detallada se encuentra al principio de este capítulo en la Sección 2.1. La magnitud de \mathbf{d} puede ser, dependiendo de la aplicación, unitaria, como es el caso en [49], la magnitud \bar{g}_s ó la raíz cuadrada de $\bar{\mathbf{g}}_s$.

Este método está basado en el gradiente, por ello, en zonas homogéneas de la imagen donde el gradiente es cero, el ASG también es cero y no hay información de la orientación. Sobre este método Verdú *et al.* [64] aplican una regularización del campo vectorial de las orientaciones para extender la información de la orientación más allá de la propia estructura del objeto, con esto se consigue difundir la información de la orientación a todos los píxeles de la imagen para su utilización en diferentes aplicaciones, como filtrado variante en el espacio [62].

Conexiones entre los métodos descritos

Tal y como sugiere Bazen en [8], se ha establecido una relación entre las técnicas de ASG con la aplicación de la técnica de PCA a la matriz de covarianza. Se puede observar que la técnica utilizada tanto en el LST como en el PCA son análogas cuando la media de los datos es cero. Posteriormente, Rieger establece en [52] conexiones teóricas entre ASG, la matriz de covarianza del campo de gradientes y la aproximación basada en el tensor estructural local.

2.4.2. Estimación de la orientación múltiple

Es lógico pensar que, en una imagen real, un píxel pueda tener asociadas varias orientaciones predominantes. Este caso es el de bifurcaciones, cruces y esquinas, también conocido en este ámbito como intersecciones en X, Y y L. La Figura 2.14 muestra un ejemplo de estas estructuras y la estimación de orientaciones producida por la aplicación de los métodos de estimación de orientación simple. En el caso de la Figura 2.14 se observa el resultado de un método de estimación simple, en concreto se trata de el algoritmo ASGVF descrito por Verdú *et al.*, en [62]. En la figura se puede observar como en los píxeles que están cercanos a intersecciones ó cruces, se obtiene una única orientación que es, en este caso, el promedio de las orientaciones cercanas. Similares resultados se obtienen con el tensor estructural o PCA.

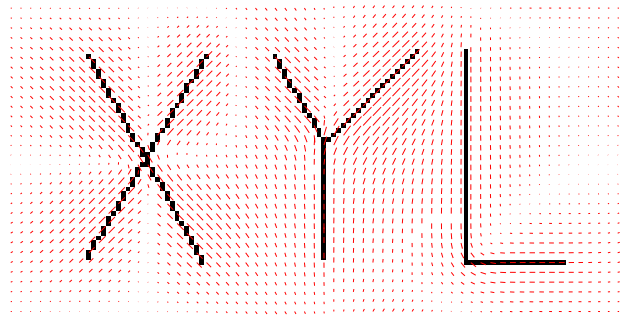


Figura 2.14: Campo vectorial de orientaciones obtenido por el algoritmo ASGVF [63] usando $\eta=1$. El tamaño de la imagen es 128×64 píxeles.

Como se puede observar, sobre estos píxeles con varias orientaciones predominantes los métodos anteriores no son capaces de distinguir entre éstas, por tanto solo se conseguirá tener un promedio de las orientaciones múltiples que puede presentar cada píxel.

Para determinar las orientaciones múltiples existen diversos métodos, la mayoría de ellos basados en el análisis del gradiente en el dominio espacial. Los más importantes son dos, la extensión del tensor estructural para el caso de múltiples orientaciones y la utilización de bancos de filtros.

Tensor estructural para orientaciones múltiples

A diferencia del método del tensor estructural para una única orientación, que se reduce a un problema de cálculo de autovalores, el proceso de estimación de orientaciones múltiples está dividido en dos pasos.

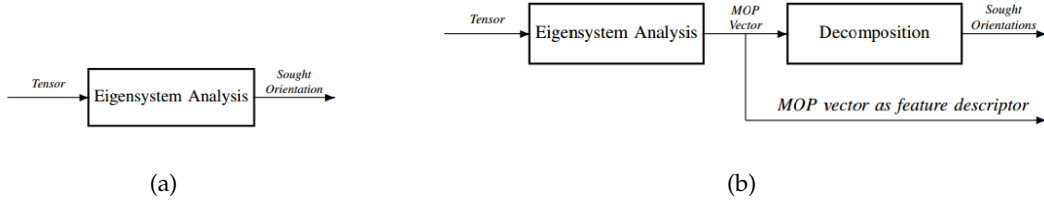


Figura 2.15: (a) Proceso de estimación de una orientación, (b) proceso de estimación de múltiples orientaciones. Imágenes extraídas de [44].

El primer paso, al igual que en el método tradicional, es el análisis de los autovalores y autovectores. En el caso de orientación simple se obtiene el vector de orientación y, en el caso de orientaciones múltiples, este vector codifica la información multidimensional. Este vector de orientaciones múltiples es el autovector correspondiente al autovalor menor. La denominación de este autovector es "vector de parámetros de orientación mixto", o por sus siglas en inglés *MOP vector*. Este vector puede ser utilizado tal cual en ciertas aplicaciones, como segmentación ó clasificación. Para las aplicaciones donde sea necesario una descomposición en diferentes vectores de orientaciones es necesario descomponer el vector de parámetros de orientación mixto [44].

La descomposición del MOP depende del modelo de composición de orientaciones múltiples considerado. Los más utilizados son dos: el modelo de oclusión de orientaciones (MOO) y el modelo aditivo de orientaciones (MAO).

En el caso del MOO, asume que una señal $S(\mathbf{x})$ está formada por M señales orientadas $s(\mathbf{x})_i, i = 1, \dots, M$ y presenta una determinada orientación dependiendo de la región Ω_i en la que se encuentre. En el caso del segundo modelo, MAO, se asume que una determinada señal $S(\mathbf{x})$ es producto de la combinación lineal de M señales orientadas $\alpha_i s(\mathbf{x})_i, i = 1, \dots, M$ siendo M el número de orientaciones múltiples.

$$\begin{aligned}
 MOO : S(\mathbf{x}) &= s_i(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \Omega \\
 MAO : S(\mathbf{x}) &= \sum_{i=1}^M \alpha_i s_i(\mathbf{x}) \forall \mathbf{x} \in \Omega
 \end{aligned} \tag{2.9}$$

Basándose en los modelos de orientación descritos, es posible aplicar un determinado mo-

delo de descomposición del vector de características de orientación que, al combinarse con unas determinadas condiciones de contorno, permiten realizar una estimación de orientaciones múltiple. Los principales problemas que presenta esta técnica son la elevada complejidad de implementación y un gran coste computacional, el cual está asociado al número de orientaciones predominantes. Todos estos factores condicionan el marco de estimación de esta técnica a la estimación por bloques, siendo prácticamente inviable su aplicación para estimar orientaciones pixel a pixel.

Bancos de filtros

El uso de bancos de filtros para estimar la orientación en imágenes es otra de las principales técnicas de estimación que pueden encontrarse. Ha sido utilizada tanto para orientaciones simples como múltiples, sin embargo en orientación simple queda relegada por otras técnicas menos costosas y que muestran resultados similares. En el caso de orientación múltiple todo esto cambia dado que no existen muchas más alternativas, más allá de la aplicación de complejos modelos matemáticos, como los descritos en la sección previa.

El funcionamiento general de esta técnica consiste en procesar una imagen con un banco formado por filtros con diferentes núcleos donde cada núcleo presenta una orientación, forma o escala determinada (ver Figuras 2.16 y 2.18). Este filtrado ocasiona una descomposición de la imagen según las respuestas de cada uno de los filtros. Matemáticamente, la respuesta de cada filtro se obtiene mediante la convolución de una imagen de entrada $x(\mathbf{n})$ con un determinado núcleo espacial $H_i(\mathbf{n})$:

$$y_i(\mathbf{n}) = x(\mathbf{n}) * H_i(\mathbf{n}) \quad (2.10)$$

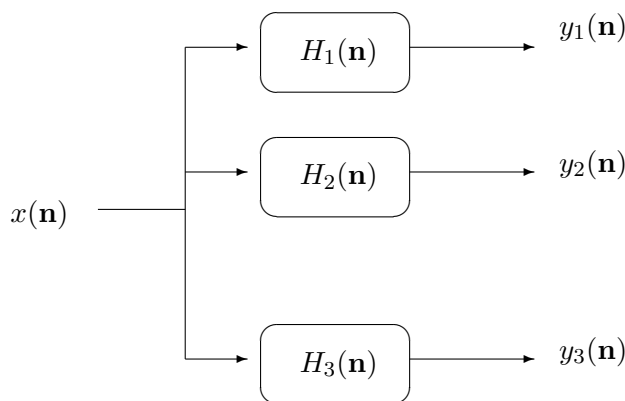


Figura 2.16: Diagrama de bloques de un banco de filtros genérico.

. Para cada una de las ramas del filtro se obtiene una versión de la imagen de entrada formada únicamente por las estructuras de la imagen que se ajustan a la de cada núcleo del banco.

Este proceso descompone la imagen de entrada en un conjunto de *subimágenes* determinado por las ramas del banco y un cierto residuo compuesto por aquellos elementos de la imagen que no se ajustan a ningún núcleo de la imagen y que por tanto no forman parte del conjunto de *subimágenes*. Finalmente, la orientación se obtiene tras procesar el conjunto de respuestas de las ramas del banco de filtros.

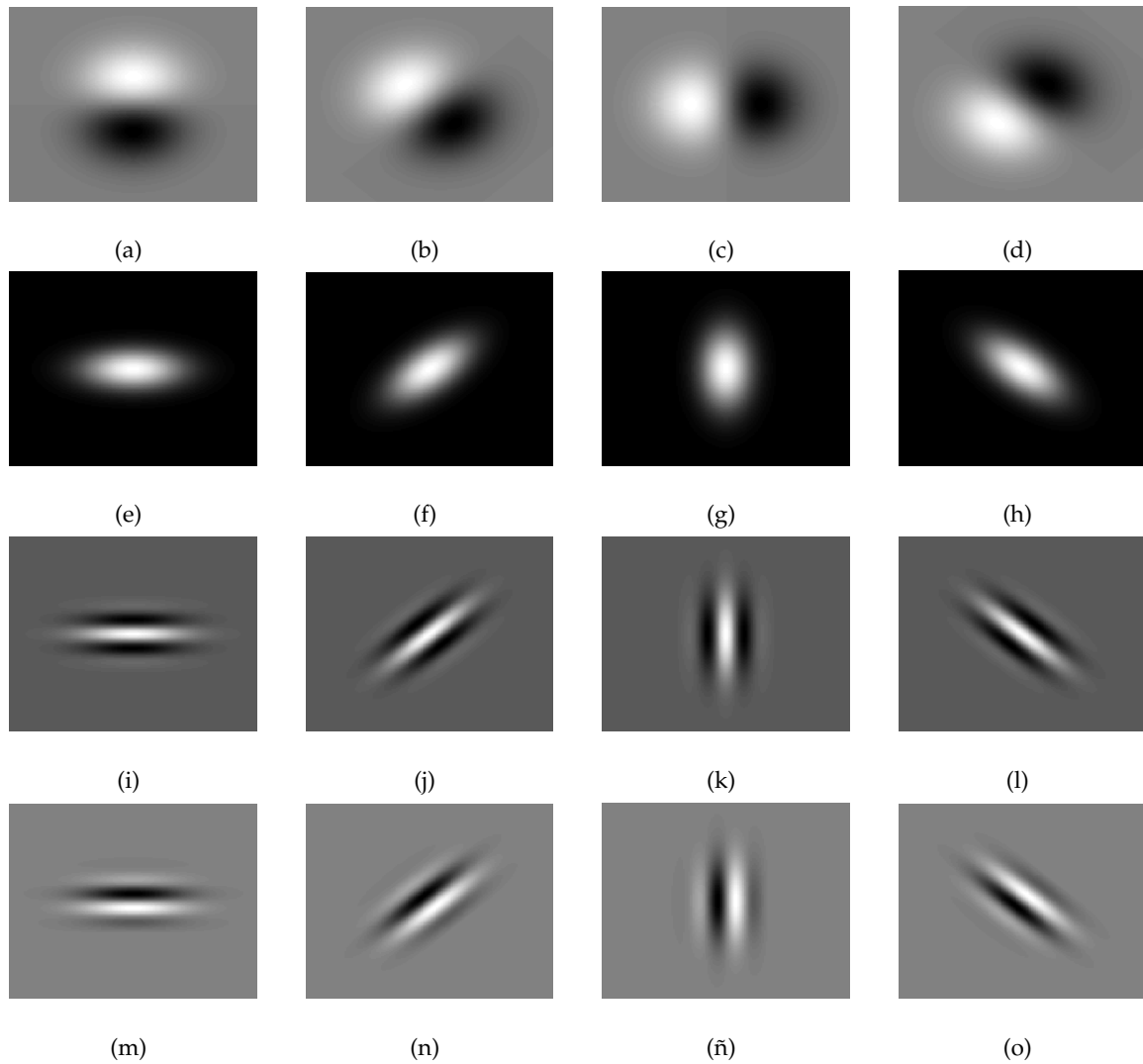


Figura 2.17: Versiones rotadas de diferentes familias de núcleos. En la primera fila se muestran diferentes versiones rotadas de un filtro en cuadratura [51]. Segunda fila: versiones rotadas de un filtro gaussiano [69]. Tercera fila: versiones de filtro basado en la parte real de la wavelet de Gabor [9]. Cuarta fila: versiones de filtro basado en la parte imaginaria de la wavelet de Gabor [9]

Uno de los puntos clave de la estimación de orientación es la adecuada elección y manejo de la gran variedad de filtros espaciales disponibles. Los primeros tipos de bancos de filtros utilizados fueron los filtros en cuadratura que han sido utilizados tradicionalmente para estimar la orientación sobre imágenes en escala de grises. Existe una gran variedad de filtros en cuadratu-

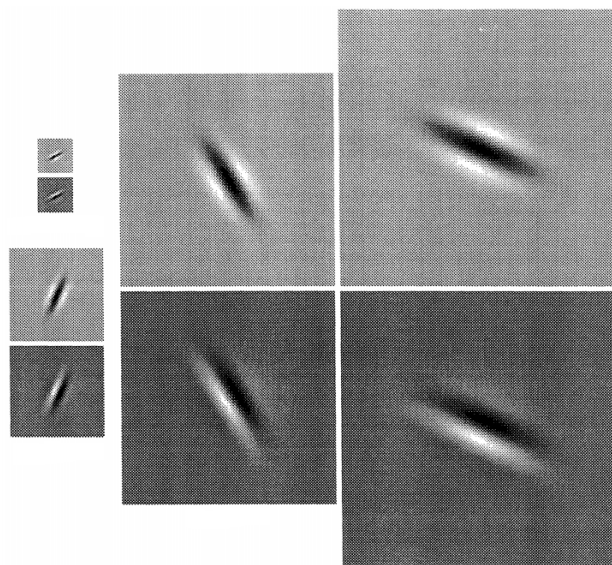


Figura 2.18: Ejemplo de diferentes núcleos con diferentes escalas y diferentes orientaciones que van a ser aplicados sobre una imagen para obtener las orientaciones múltiples. Imagen extraída de [51].

ra entre los que podemos encontrar los basados en la segunda derivada de núcleos gaussianos [69] o los basados en wavelets [9], [23]. Inicialmente estos filtros mostraban buenos resultados en el proceso de estimación a expensas de requerir un elevado número de filtros para cubrir todas las posibles orientaciones de los objetos contenidos en las imágenes, acarreando por tanto un elevado coste computacional. Para solventar el elevado coste de computación es posible utilizar las propiedades de los filtros en cuadratura para obtener cualquier respuesta como la combinación lineal de unos pocos filtros [22]. Basados en esta misma estrategia, pero cambiando el tipo de filtro, encontramos otras aproximaciones como es el caso de los filtros adaptados [43, 45]. Para estimar la orientación en estructuras alargadas (e.g. las venas en imágenes de retina o imágenes de contornos) los bancos de filtros pueden ser contruidos mediante operadores formados por líneas orientadas o filtros IRON [41, 42], que muestran excelentes resultados en imágenes con bajo ruido; o banco de filtros basados en gaussianas anisotrópicas para el caso de imágenes ruidosas.

Entre las principales características del uso de bancos de filtros aplicados a la estimación de orientaciones múltiples encontramos ciertas ventajas:

- Mejora respecto a las técnicas de gradiente en cuanto a inmunidad al ruido. En este caso la elección del núcleo más acertado para la aplicación determinará la inmunidad de este método.
- Posibilidad de estimar tanto orientaciones simples como múltiples.
- Capacidad de producir resultados multiescala si se trabaja sobre el residuo del banco de

filtros.

Por otro lado, también presenta diversas desventajas que pueden condicionar su aplicación. Las más importantes que se pueden destacar son:

- Resolución angular del campo de orientaciones dependiente del número de filtros del banco y el tamaño de éstos.
- Incremento del coste computacional con el número de filtros del banco.
- Dificultad en la correcta elección de los núcleos del banco y el procesamiento de la información aportada.

2.5. Difusión de la información de las orientaciones

Como complemento a los métodos de estimación de orientaciones, un concepto bastante ligado a éstos es el de la difusión de las orientaciones. Dado que las características de orientación dependen de las zonas no homogéneas de las imágenes, en otras palabras, las estructuras de los objetos contenidos en estas, el campo vectorial de orientaciones obtenido por los métodos de estimación de orientaciones es diferente a cero solo en las zonas cercanas a las estructuras. En las zonas homogéneas de la imagen, el gradiente es cero y por lo tanto el campo vectorial de orientaciones también es cero. Mediante la difusión del campo vectorial de orientaciones es posible extender la información de orientación más allá de los píxeles cercanos de las estructuras permitiendo disponer de información de orientación en todos los píxeles de una imagen. Existen múltiples técnicas para conseguir una difusión de la orientación. Entre las más simples se encuentra el filtrado paso bajo del campo vectorial de orientaciones o mediante otras técnicas más complejas [37], como por ejemplo, mediante la regularización de un funcional de energía [3].

La difusión de las orientaciones está basada en un proceso de regularización que a su vez proporciona una mayor inmunidad al ruido, esta es una ventaja bastante importante que ha sido resaltada por Perona en [49].

La combinación de la estimación de orientaciones con un proceso de difusión permite disponer de mejoras significativas en el campo de orientación tales como: reducción de errores de estimación a consecuencia del ruido, suavizado del campo vectorial de orientaciones y extensión de la información de orientación más allá de las zonas cercanas a las estructuras mencionada anteriormente.

Métodos de regularización

A lo largo de los años se han presentado diferentes aproximaciones al proceso de regularización. Entre las más importantes podemos encontrar el filtrado paso bajo espacial utilizado por Perona [49]. Ésta es una de las técnicas más simples utilizadas para regularizar los campos vectoriales y además presenta un excelente compromiso entre suavidad del campo vectorial de orientaciones y coste computacional. Otros autores como Weickert [65] o Tschumperlé [58, 59] han propuesto modelos de regularización basados en métodos de difusión anisotrópica. Otros autores como Larrey *et al.* proponen modelos de regularización en el dominio de la frecuencia basados en una aproximación variacional [35].

Visualmente el proceso de difusión queda ilustrado en la Figura 2.19 y la Figura 2.20. Como puede observarse, con la regularización de orientaciones se produce una difusión de los campos vectoriales de orientación, alcanzando a todos los píxeles de la imagen y a su vez reduciendo el ruido en los vectores del campo de orientaciones.

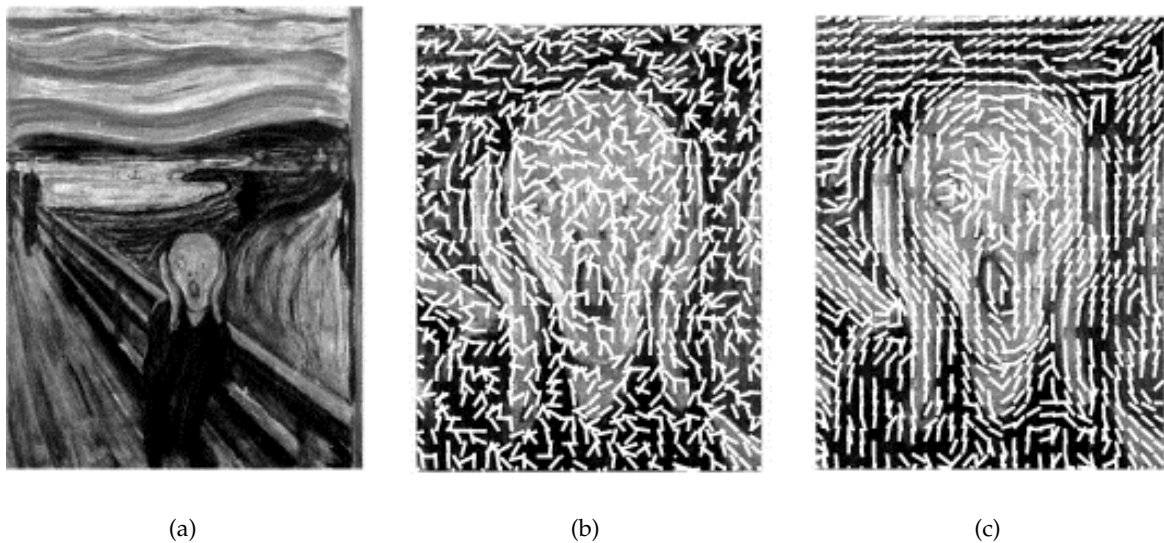


Figura 2.19: (a) Imagen original, (b) campo vectorial de orientaciones, (c) campo vectorial de orientaciones regularizado. Imágenes extraídas de [35].

Una extensión de la difusión de la información al caso multidimensional fue presentada por Larrey *et al.* en 2011 [35], donde utiliza la difusión de la información en volúmenes de imágenes, como pueden ser las imágenes médicas de tomografías.

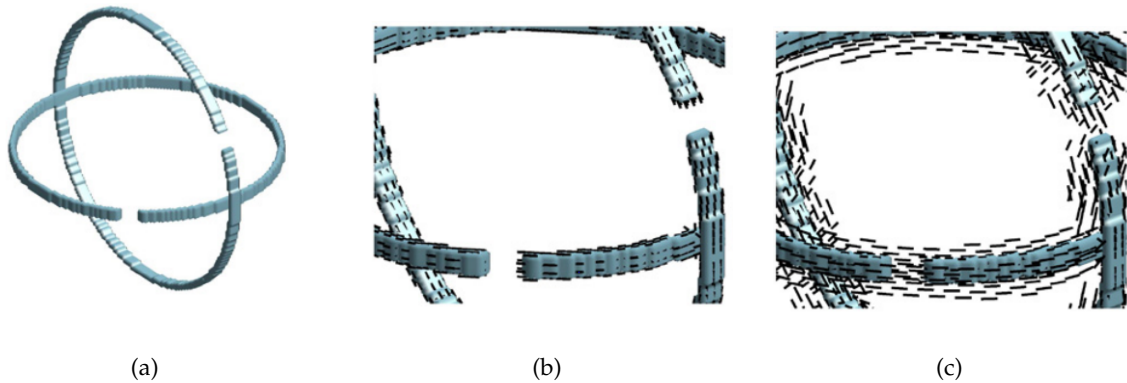


Figura 2.20: (a) Imagen original, (b) campo vectorial de orientaciones, (c) campo vectorial de orientaciones regularizado. Imágenes extraídas de [35].

2.6. Objetivos, motivación y organización de esta Tesis

En esta Tesis doctoral se han revisado los métodos y aplicaciones de la estimación de orientaciones, presentando los métodos más usados así como las aplicaciones más importantes. Seguidamente, como principal contribución a la Tesis, se ha presentado un marco capaz de sistematizar el proceso de estimación de orientaciones independientemente de la aplicación objetivo. Finalmente, se ha estudiado el uso del marco propuesto en diferentes aplicaciones, concretamente en clasificación de texturas, en detección de esquinas y en filtrado variante en el espacio.

Como ya ha sido comentado, el método de presentación de la presente Tesis doctoral es mediante un compendio de artículos. Una vez presentadas las aplicaciones más importantes de la estimación de orientación y los métodos más utilizados, en los siguientes capítulos se presentarán los artículos con los resultados obtenidos durante el periodo de investigación de la Tesis, con una introducción para cada uno de los artículos incluidos en este compendio. Finalmente el capítulo de conclusiones y trabajo futuro cierra la Tesis.

3 Compendio de artículos

La modalidad de realización de la presente Tesis es el compendio de artículos y por lo tanto a lo largo de este capítulo se realizará una descripción de cada uno de los artículos que se han realizado durante el periodo investigador.

Las principales aportaciones de la presente Tesis doctoral son, en primer lugar, la propuesta de un marco de trabajo de estimación de orientación unificado que sea independiente del tipo de imagen o aplicación. Se trata de un diseño modular donde cada uno de los bloques que lo componen son independientes del resto, es decir que permiten cualquier tipo de modificación sin que éstas afecten al funcionamiento del resto de bloques. Basándonos en el marco teórico se ha realizado una herramienta práctica de estimación de orientaciones, la cual ha sido aplicada en diferentes aplicaciones, mostrando excelentes resultados en todas ellas. La presentación del marco de trabajo queda recogida en la siguiente publicación.

- Artículo 1: A.G. Legaz-Aparicio, R. Verdú-Monedero, J. Angulo, "Multiscale Estimation of Multiple Orientations based on Morphological Directional Openings", *Signal, Image and Video Processing*, 2018, Accepted, (doi:10.1007/s11760-018-1276-y). **ISI-JCR(2017): 1.643, Posición 163 de 260 (T2, Q3), cat ENGINEERING, ELECTRICAL & ELECTRONIC.**

Una vez definido el marco teórico, éste ha sido aplicado en diferentes campos. Cronológicamente la aplicación de la herramienta de estimación de orientaciones es la siguiente. Inicialmente fue utilizada para aplicaciones médicas, en concreto la detección de bifurcaciones y cruces en el árbol de venas de la retina. El estudio de bifurcaciones y cruces de las imágenes de las venas resulta de gran utilidad para el diagnóstico y seguimiento de diferentes enfermedades vasculares. De este campo de estudio han surgido tres trabajos, dos de ellos publicados en congresos internacionales y un tercero publicado en una revista internacional con índice de impacto. Los artículos son los siguientes:

- Artículo 2: Álvaro-Ginés Legaz-Aparicio, Rafael Verdú-Monedero, Juan Morales-Sanchez, Jorge Larrey-Ruiz, Jesús Angulo, "Detection of Retinal Vessel Bifurcation by Means of Multiple Orientation Estimation Based on Regularized Morphological Openings". *XIII Mediterranean Conference on Medical and Biological Engineering and Computing*, Sevilla, 2013.

- Artículo 3: S. Morales, Á. Legaz-Aparicio, V. Naranjo, R. Verdú-Monedero, "Determination of Bifurcation Angles of the Retinal Vascular Tree through Multiple Orientation Estimation based on Regularized Morphological Openings", *International Conference on Bio-inspired Systems and Signal Processing (BIOSIGNALS 2015)*, Lisbon (Portugal), January 2015.

- Artículo 4: S. Morales, V. Naranjo, J. Angulo, A.G. Legaz-Aparicio, R. Verdú-Monedero, "Retinal network characterization through fundus image processing: significant point identification on vessel centerline", *Signal Processing: Image Communication*, Vol. 59, pp. 50-64, November 2017. **ISI-JCR(2017): 2.073, Posición 118 de 260 (T2, Q2), cat ENGINEERING, ELECTRICAL & ELECTRONIC.**

El análisis y clasificación de texturas es otro de los grandes campos de aplicación de la estimación de orientación. En este sentido, en esta Tesis se propone un método de extracción de características robusto frente a cambios de iluminación, rotación o escala y a su vez muy robusto frente al ruido. Los resultados de este trabajo muestran las excelentes prestaciones del método propuesto en comparación con otros métodos del estado del arte. La propuesta de este método de análisis y clasificación de texturas queda recogida en la siguiente publicación:

- Artículo 5: A.G. Legaz-Aparicio, R. Verdú-Monedero, K. Engan, "Noise Robust and Rotation Invariant Framework for Texture Analysis and Classification", *Applied Mathematics and Computation*, Volume 335, pp. 124 a 132, October 2018. **ISI-JCR(2017): 2.300, Posición 21 de 252 (T1, Q1), cat MATHEMATICS, APPLIED.**

El último caso práctico de la estimación de orientaciones es su aplicación en la morfología matemática. Mediante el uso de un campo vectorial de orientaciones es posible construir operadores morfológicos que sean capaces de cambiar su forma y orientación, consiguiendo de esta forma adaptarse mejor a los contornos de los objetos contenidos en las imágenes. De esta forma podemos disponer de operadores morfológicos que sean capaces de salvar las limitaciones de la morfología matemática en algunas aplicaciones. En esta Tesis principalmente se ha abordado el uso de la morfología aplicado al filtrado morfológico variante en el espacio. Este trabajo queda recogido en las siguientes publicaciones:

- Artículo 6: Á. Legaz-Aparicio, Rafael Verdú-Monedero, Jesús Angulo, "Adaptive spatially variant morphological filters based on a multiple orientation vector field", *Mathematical modelling in Engineering & Human Behaviour* 2016.

- Artículo 7: A.G. Legaz-Aparicio, R. Verdú-Monedero, J. Angulo, "Adaptive morphological filters based on a multiple orientation vector field dependent on image local features", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 330, pp. 965-981, March 2018. **ISI-JCR(2017): 1.632, Posición 49 de 252 (T1, Q1), cat MATHEMATICS, APPLIED.**

A continuación, se describen de forma resumida las aportaciones de cada uno de los artículos que forman el compendio.

3.1. Artículo 1: Multiscale Estimation of Multiple Orientations based on Morphological Directional Openings.

A.G. Legaz-Aparicio, R. Verdú-Monedero, J. Angulo, "Multiscale Estimation of Multiple Orientations based on Morphological Directional Openings", *Signal, Image and Video Processing*, 2018, Accepted, (doi:10.1007/s11760-018-1276-y). ISI-JCR(2017): 1.643, Posición 163 de 260 (T2, Q3), cat ENGINEERING, ELECTRICAL & ELECTRONIC.

En este artículo se propone un nuevo marco teórico para la estimación de orientaciones. El marco propuesto es capaz de realizar una estimación de orientaciones múltiples, solventando las limitaciones de la estimación de la orientación simple; es independiente al tipo de aplicación o el escenario, permitiendo de esta forma sistematizar el proceso de estimación múltiple y presenta un diseño modular donde cada una de las etapas es independiente del resto, permitiendo realizar modificaciones sobre cualquier etapa sin tener que alterar el resto. El proceso de estimación está basado en la utilización de cuatro etapas o bloques de procesamiento, los cuales van actuando de forma secuencial sobre una determinada imagen entrada hasta acabar proporcionando un campo vectorial de orientaciones múltiples. De esta forma, el campo vectorial obtenido tiene en cuenta para cada píxel cada una de las orientaciones asociadas a dicho píxel, no solo una única orientación. El funcionamiento de cada uno de los bloques que forman el marco teórico propuesto queda explicado en la Figura 3.1, donde se muestran los diagramas de flujo y bloques del marco de trabajo propuesto. El funcionamiento general de cada bloque es el siguiente:

1. El primer bloque realiza una extracción de las estructuras de la imagen mediante un algoritmo de detección de bordes, en concreto en este trabajo se propone el módulo del gradiente. Otros algoritmos de extracción de contornos más avanzados también pueden ser usados. En este trabajo no han sido contemplados, pero son fácilmente aplicables. Una revisión de éstos puede encontrarse en [37].
2. En el segundo bloque, las estructuras de la imagen se descomponen mediante un banco de filtros, obteniendo para cada una de las ramas de cada filtro una sub-imagen compuesta únicamente por las estructuras cuya orientación y forma corresponden con la forma y orientación del filtro correspondiente a cada rama. Diversos filtros del estado del arte han sido comparados y como contribución de la Tesis hemos propuesto el uso de un determinado filtro morfológico, las aperturas direccionales.

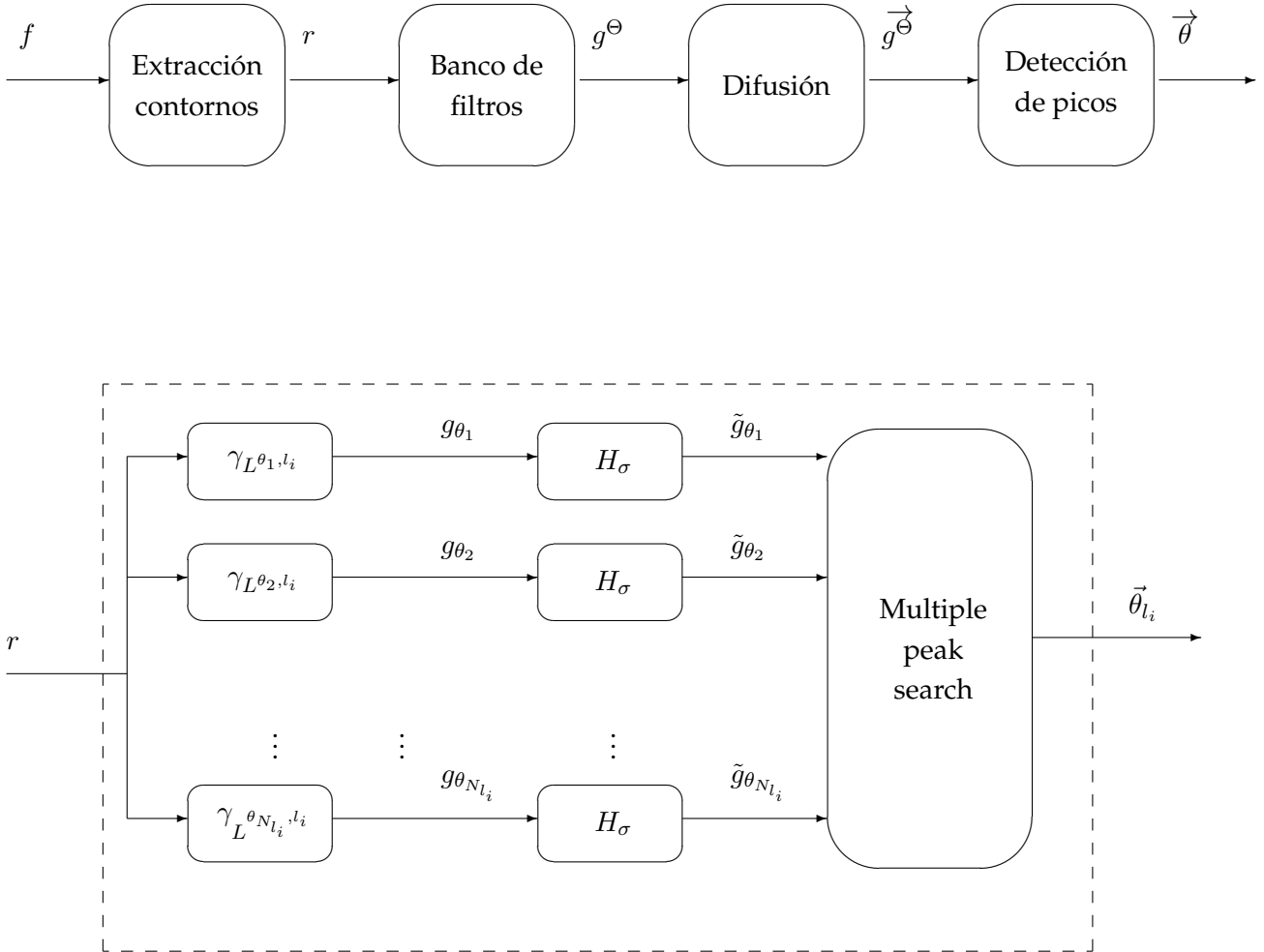


Figura 3.1: Diagramas de flujo y bloques del marco teórico de estimación de orientación múltiple propuesto.

3. El tercer bloque realiza una difusión, mediante un filtrado paso bajo en el dominio de la frecuencia, de las respuestas de cada una de las ramas del filtro. El objetivo de este bloque es extender la información de orientación más allá de los píxeles cercanos a las estructuras, disponiendo en toda la imagen de información de orientación.
4. El cuarto bloque procesa las respuestas filtradas de cada una de las ramas del banco de filtros, agrupándolas para cada uno de los píxeles. El vector resultante para cada uno de los píxeles contiene la firma direccional de dicho píxel. Con la firma direccional se realiza una búsqueda de máximos para obtener las orientaciones predominantes. En este proceso es

necesario interpolar mediante b-splines cúbicos la firma direccional, detectando las orientaciones predominantes como los máximos de la firma direccional interpolada.

Finalmente, tras aplicar cada uno de estos bloques de procesado se obtiene un campo vectorial de orientaciones múltiple. Una de las principales ventajas del marco de trabajo propuesto es la capacidad de estimar de más de una orientación, lo que mejora las limitaciones de los métodos de estimación simples. En la Figura 3.2 se muestra visualmente cada una de las etapas del proceso de estimación de orientaciones.

En la sección de resultados de este artículo se comparan diferentes tipos de filtros y se muestran resultados de aplicación para distintos tipos de imágenes.

3.2. Artículo 2: Detection of Retinal Vessel Bifurcations by Means of Multiple Orientation Estimation Based on Regularized Morphological Openings.

Álvar-Ginés Legaz-Aparicio, Rafael Verdú-Monedero, Juan Morales-Sanchez, Jorge Larrey-Ruiz, Jesús Angulo, "Detection of Retinal Vessel Bifurcation by Means of Multiple Orientation Estimation Based on Regularized Morphological Openings". *XIII Mediterranean Conference on Medical and Biological Engineering and Computing*, Sevilla, 2013.

En este artículo se presenta una nueva aproximación para la detección de las bifurcaciones y cruces presentes en los vasos sanguíneos de la retina. El estudio de las bifurcaciones y cruces en imágenes de la retina resulta de gran utilidad para el diagnóstico y seguimiento de diferentes cardiopatías vasculares, así como otras enfermedades [6, 9, 23]. Desafortunadamente, debido a la gran cantidad de bifurcaciones y cruces presentes en una imagen de retina, este proceso puede resultar bastante tedioso para los facultativos (ver Figura 3.3.(a)). Es por tanto de gran utilidad el uso de herramientas que permitan automatizar el proceso de detección de éstas. En este sentido, el presente trabajo describe una nueva aproximación para la detección de bifurcaciones y cruces en imágenes de retina basada en la estimación de orientaciones.

Técnicamente, el funcionamiento es el siguiente: en primer lugar, se realiza una segmentación de las imágenes de la retina, extrayendo el árbol de venas de la retina. En este trabajo no se aborda el proceso de segmentación y en su lugar se trabaja directamente sobre imágenes ya segmentadas presentes en la base de datos DRIVE [55]. Sobre la imagen segmentada se realiza una estimación de orientaciones múltiples, usando el marco teórico propuesto previamente, que da lugar a un campo vectorial de orientaciones múltiples. Seguidamente se marcan como puntos de interés (bifurcaciones y cruces) aquellos píxeles de la imagen que presentan varias orientaciones

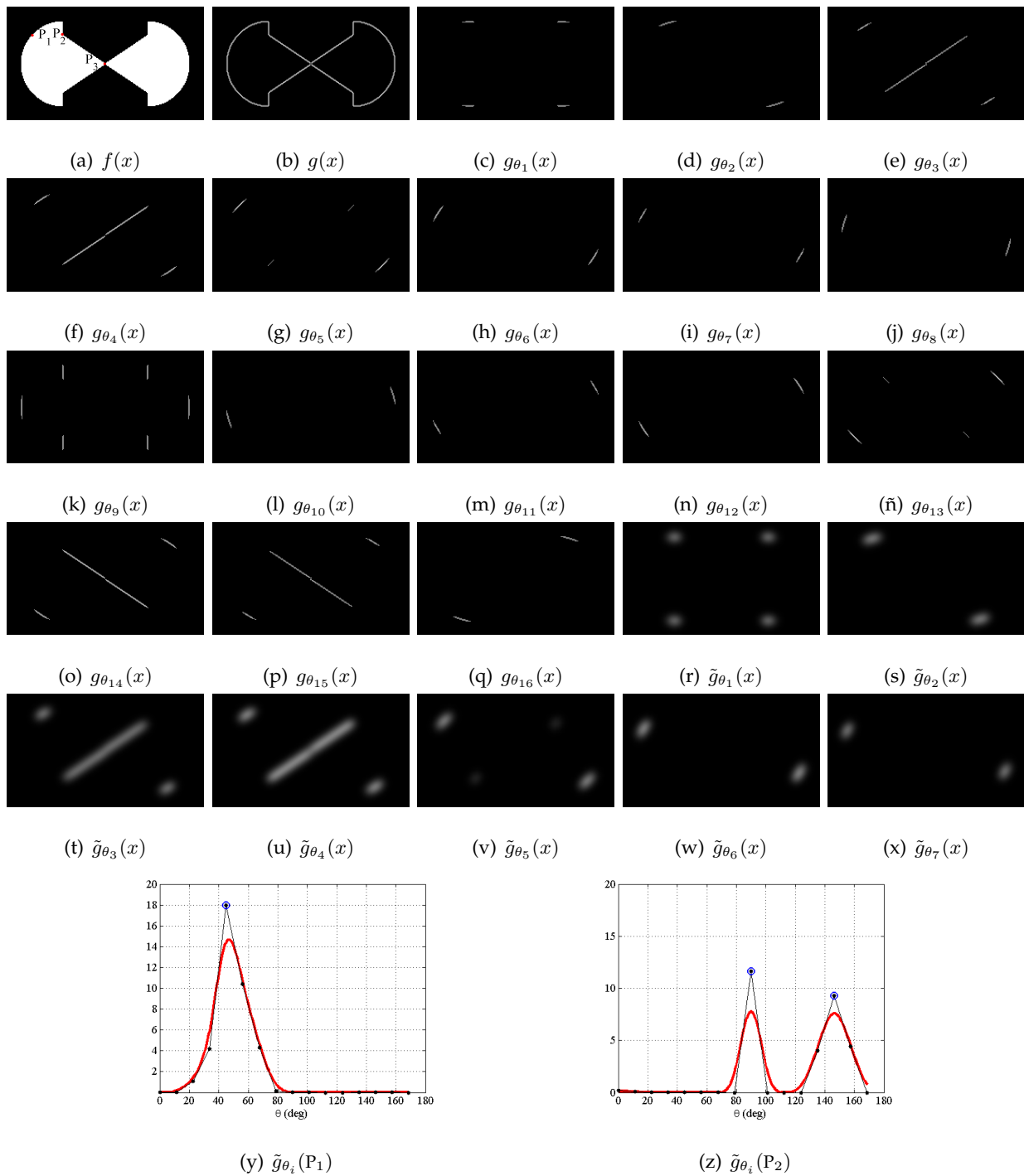


Figura 3.2: Proceso de estimación del campo vectorial de orientaciones. (a) Imagen de entrada, (b) contornos de la imagen de entrada, (c)-(q) descomposición de la imagen de entrada por una familia de filtros orientados, (r)-(x) difusión de las respuestas del banco de filtros para extender la información de orientación, (y)-(z) firmas direccionales de los píxeles P1 y P2.

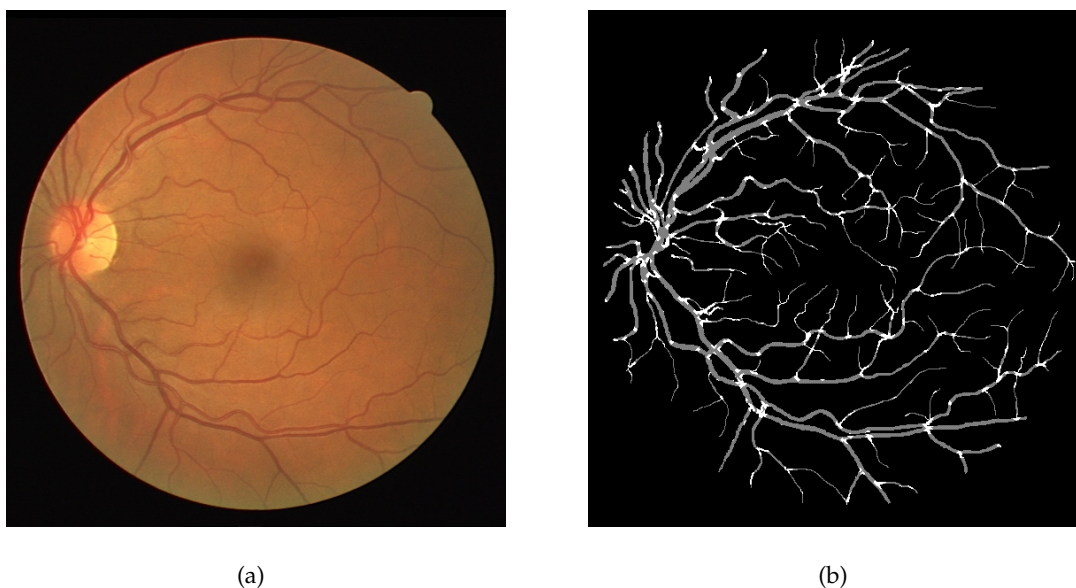


Figura 3.3: (a)Imagen de retina humana donde puede observarse el gran número de bifurcaciones y cruces existente; (b) resultado de la aplicación del método de detección de bifurcaciones y cruces propuesto.

predominantes asociadas. De esta forma se consigue automatizar el proceso de detección. En la Figura 3.3.(b) se puede observar un resultado visual de la detección de bifurcaciones y cruces.

Si bien los resultados mostrados en este trabajo son escasos, se puede apreciar que prácticamente todas las bifurcaciones y cruces han sido detectadas. Desafortunadamente, los resultados obtenidos muestran la existencia de falsos positivos, los cuales se corresponden con zonas de la imagen con alta curvatura que no se corresponden a bifurcaciones y cruces (ver Figura 3.3.(b)).

3.3. Artículo 3: Determination of Bifurcation Angles of the Retinal Vascular Tree through Multiple Orientation Estimation based on Regularized Morphological Openings.

S. Morales, Á. Legaz-Aparicio, V. Naranjo, R. Verdú-Monedero, "Determination of Bifurcation Angles of the Retinal Vascular Tree through Multiple Orientation Estimation based on Regularized Morphological Openings", *International Conference on Bio-inspired Systems and Signal Processing (BIOSIGNALS 2015)*, Lisbon (Portugal), January 2015.

Este artículo es la continuación de trabajo anterior. En este caso se busca conseguir mejorar el proceso de detección de bifurcaciones y cruces reduciendo el número de falsos positivos que arro-

jaba el método inicial. Para esto se propone una etapa de post-procesado que clasifique los puntos de interés detectados, cribando aquellos que, aun teniendo asociadas orientaciones múltiples éstas no corresponden con bifurcaciones o cruces, es decir, vasos sanguíneos con alta curvatura o terminaciones.

Para realizar esta clasificación se coloca una ventana circular en torno a cada punto de interés y se analiza el número de ramas que cruzan dicha ventana, dependiendo del número de ramas que cruzan la ventana los puntos de interés se pueden clasificar en cuatro tipos:

1. Si solo una rama cruza la ventana, el punto de interés es la terminación de un vaso sanguíneo (ver Figura 3.4.(a)).
2. Si son dos ramas, el punto de interés es un vaso sanguíneo con una cierta curvatura (ver Figura 3.4.(b)).
3. Si es un número impar mayor que 1, se trata de una bifurcación (ver Figura 3.4.(c)).
4. Si es un número par mayor que 2, se trata de un cruce de vasos (ver Figura 3.4.(d)).

Dado que el interés médico se encuentra en las bifurcaciones y cruces, el resto de los puntos de interés se consideran falsos positivos y se desechan, tal y como puede observarse en la Figura 3.5. Una vez obtenidas las bifurcaciones y cruces es posible extraer diferentes figuras de mérito que permitan una mejor caracterización de éstas. En este trabajo en concreto se han medido los ángulos de las bifurcaciones como la diferencia de los vectores de orientación de cada rama medidos en la intersección de la ventana circular con cada rama.

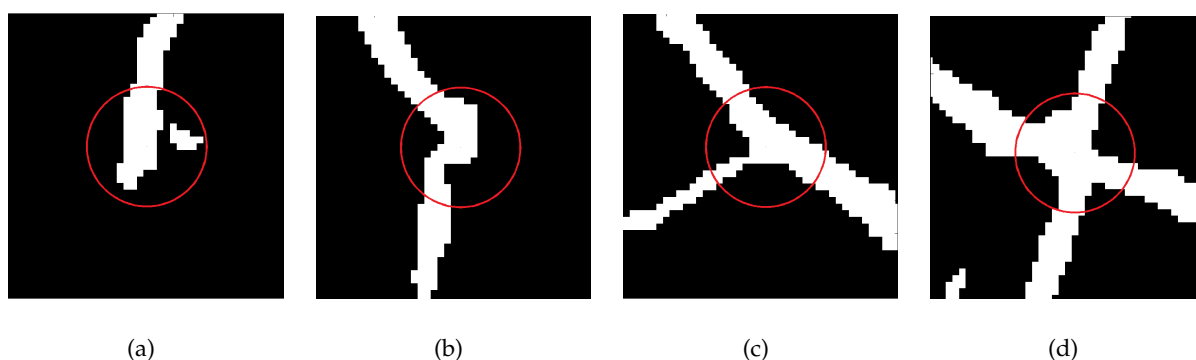


Figura 3.4: Ventana circular colocada sobre los diferentes tipos de puntos de interés que pueden ser detectados en las imágenes de retinas.

A tenor de los resultados obtenidos, se puede observar como gracias a la aplicación de la etapa de cribado, se ha reducido considerablemente el número de falsos positivos que mostraba la aproximación original.

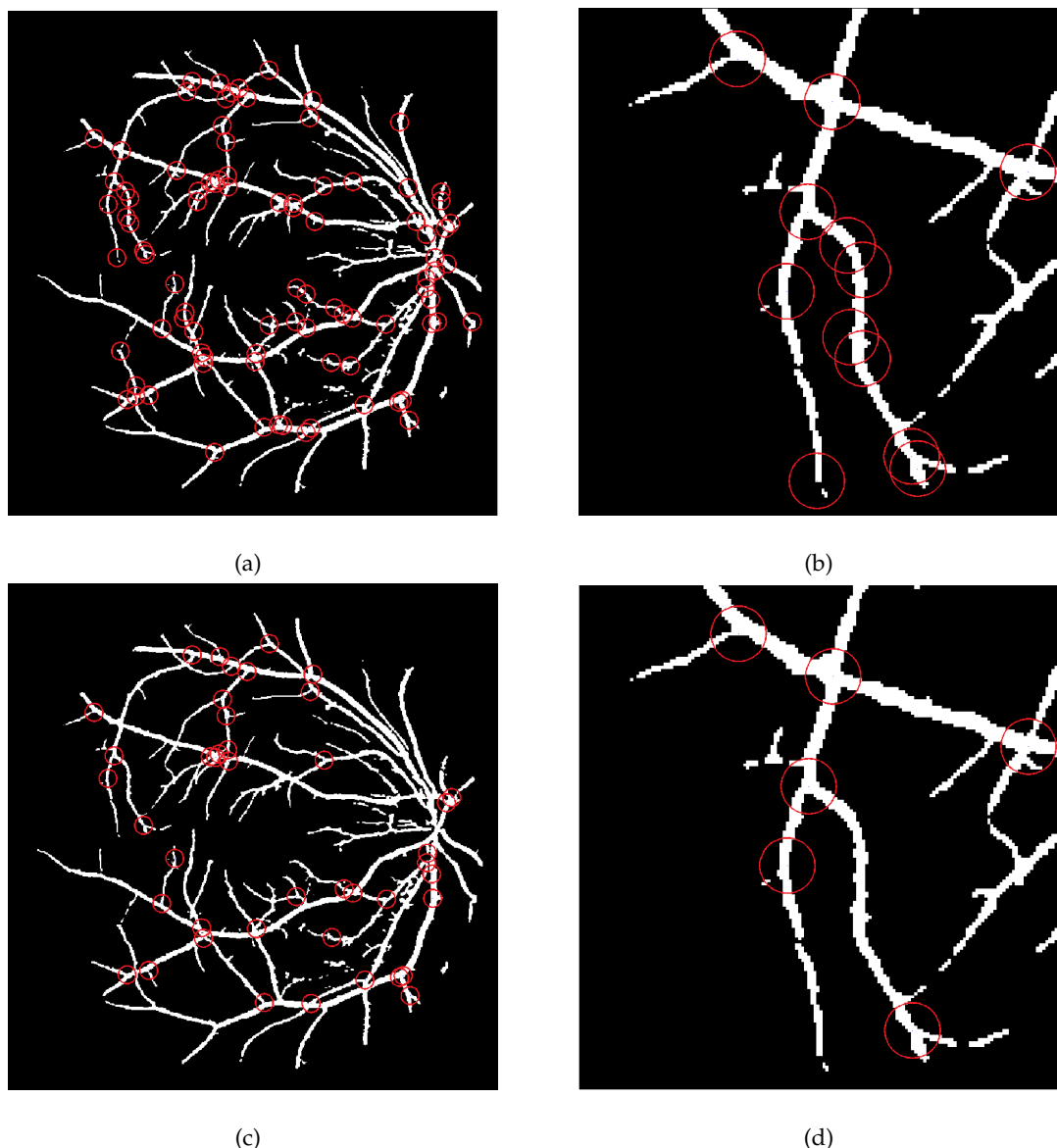


Figura 3.5: (a) Detección de puntos de interés: bifurcaciones, cruces y zonas de alta curvatura. (b) Zoom de (a). (c) Bifurcaciones obtenidas después de la etapa de clasificación. (d) Zoom de (c).

3.4. Artículo 4: Retinal network characterization through fundus image processing: significant point identification on vessel centerline.

S. Morales, V. Naranjo, J. Angulo, A.G. Legaz-Aparicio, R. Verdú-Monedero, "Retinal network characterization through fundus image processing: significant point identification on vessel centerline", *Signal Processing: Image Communication*, Vol. 59, pp. 50-64, November 2017. ISI-JCR(2017): 2.073, Posición 118 de 260 (T2, Q2), cat ENGINEERING, ELECTRICAL & ELEC-

TRONIC.

Este artículo continua con el desarrollo de los métodos de detección y caracterización de bifurcaciones y cruces de los arboles de venas contenidos en imágenes de retina. La principal contribución de este artículo es la presentación de una metodología completa para la detección de bifurcaciones y cruces. Ésto incluye una etapa de procesado para la extracción del árbol de venas sobre la imagen de entrada, seguida de la aplicación del método de detección de bifurcaciones y cruces y la posterior caracterización de éstas según su ángulo.

Extracción del árbol de venas

En la mayoría de los casos, la detección del árbol de venas es un paso necesario antes de realizar un análisis de las características de las venas. La aproximación más común en la literatura es una etapa inicial de segmentación, seguida de la esqueletización de las venas segmentadas. Tras extraer el esqueleto del árbol de venas ya es posible realizar el análisis de las características de las venas. Algunos ejemplos son el cálculo del calibre de las venas, los puntos significativos o los ángulos de las bifurcaciones. El principal problema que presenta esta aproximación es la gran dependencia de cada una de las etapas con las anteriores así como el alto coste computacional. En este artículo se propone una nueva aproximación basada en la obtención del esqueleto del árbol de venas eliminando la etapa de segmentación. De esta forma se consigue reducir la dependencia de cada una de las etapas y el coste computacional.

El método propuesto está basado principalmente en la morfología matemática y consta de dos partes. En la primera etapa, se calcula la curvatura principal de la imagen de retina y en la segunda etapa se aplica la transformada watershed para extraer el esqueleto del árbol de venas. El diagrama de flujo de este proceso se muestra en la Figura 3.6. Visualmente los resultados de cada una de las etapas pueden observarse en la Figura 3.7.

3.4.1. Detección de bifurcaciones y cruces

La detección de bifurcaciones y cruces se realiza sobre la imagen proporcionada por el método de esqueletización. El algoritmo es el mismo que ha sido aplicado en los artículos anteriores: una primera etapa de detección de puntos de interés, seguida de una etapa de cribado donde se desechan los falsos positivos que no se corresponden con bifurcaciones y cruces.

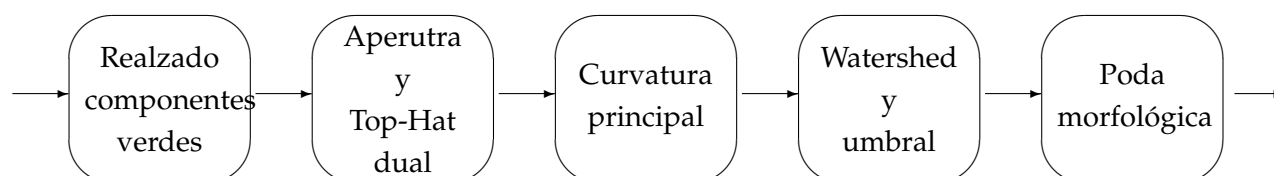


Figura 3.6: Diagrama de flujo del proceso de esqueletización propuesto.

3.4.2. Caracterización de bifurcaciones y cruces

En ultimo lugar se han caracterizado las bifurcaciones y cruces atendiendo a la orientación de éstas. Este proceso es realizado tal y como se propone en el artículo anterior. Visualmente la determinación del ángulo de las bifurcaciones y cruces puede observarse en la Figura 3.8.

En la sección de resultados se pueden encontrar multitud de ejemplos de la aplicación del método de detección de bifurcaciones y cruces, comparados con otros métodos del estado del arte. Los resultados de las comparativa no son unicamente visuales, además se incluyen tablas donde se recogen en número de verdaderos positivos, falsos positivos y fallos arrojados por cada método. A tenor de los resultados obtenidos, se puede comprobar como el método propuesto es capaz de mejorar los resultados obtenidos por los métodos existentes.

3.5. Artículo 5: Noise Robust and Rotation Invariant Framework for Texture Analysis and Classification.

A.G. Legaz-Aparicio, R. Verdú-Monedero, K. Engan, "Noise Robust and Rotation Invariant Framework for Texture Analysis and Classification", *Applied Mathematics and Computation*, Volume 335, pp. 124 a 132, October 2018. ISI-JCR(2017): 2.300, Posición 21 de 252 (T1, Q1), cat MATHEMATICS, APPLIED.

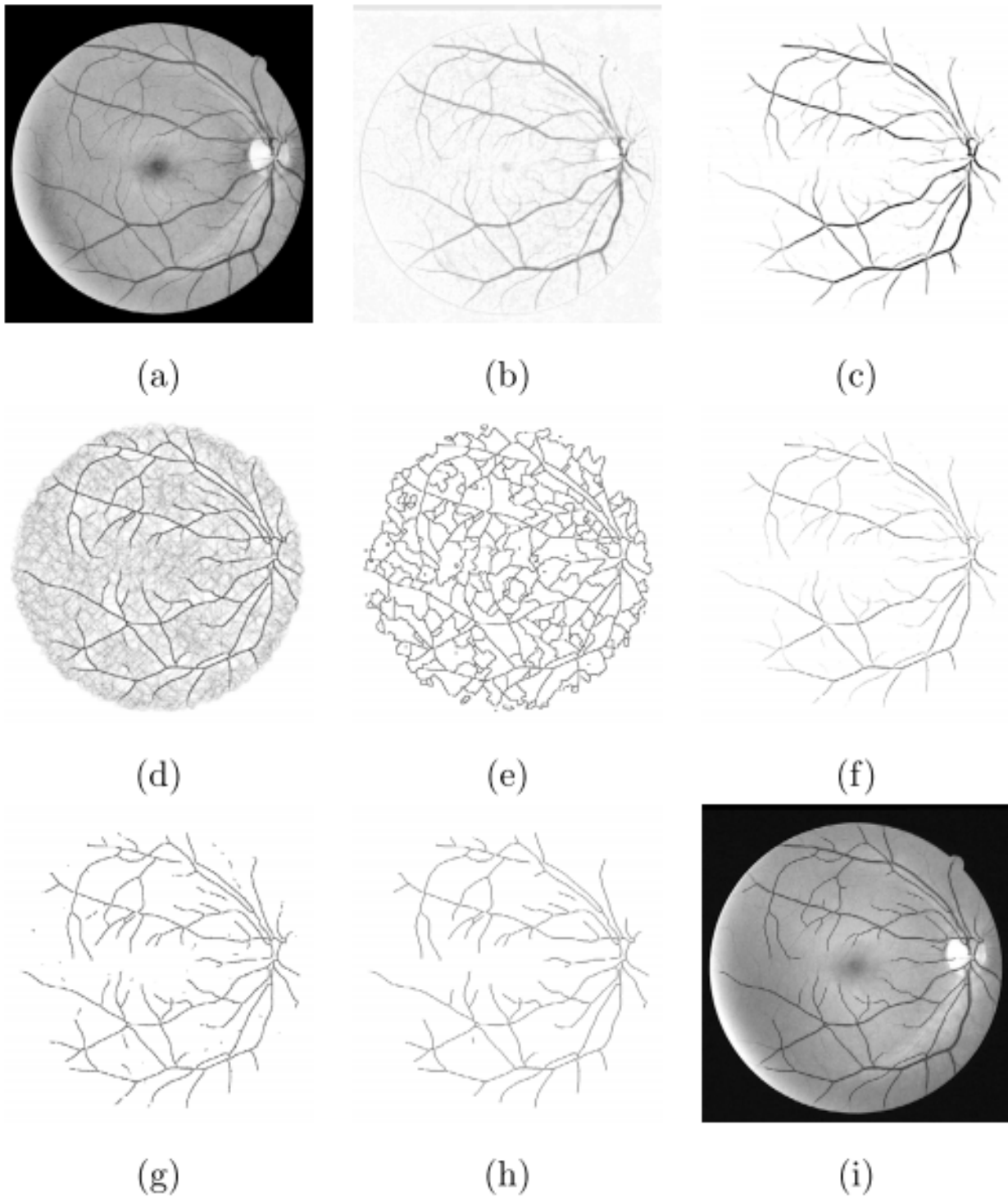


Figura 3.7: Proceso de esqueletización. (a) Imagen de entrada basada en la componente verde realizada. (b) Filtrado por Top-Hat dual. (c) Curvatura principal. (d) Función densidad de probabilidad obtenida con 10 simulaciones y 300 marcadores aleatorios. (e) Fronteras Watershed. (f) Producto entre la curvatura principal y las fronteras Watershed. (g) Umbralizado. (h) Poda. (i) Resultado final.

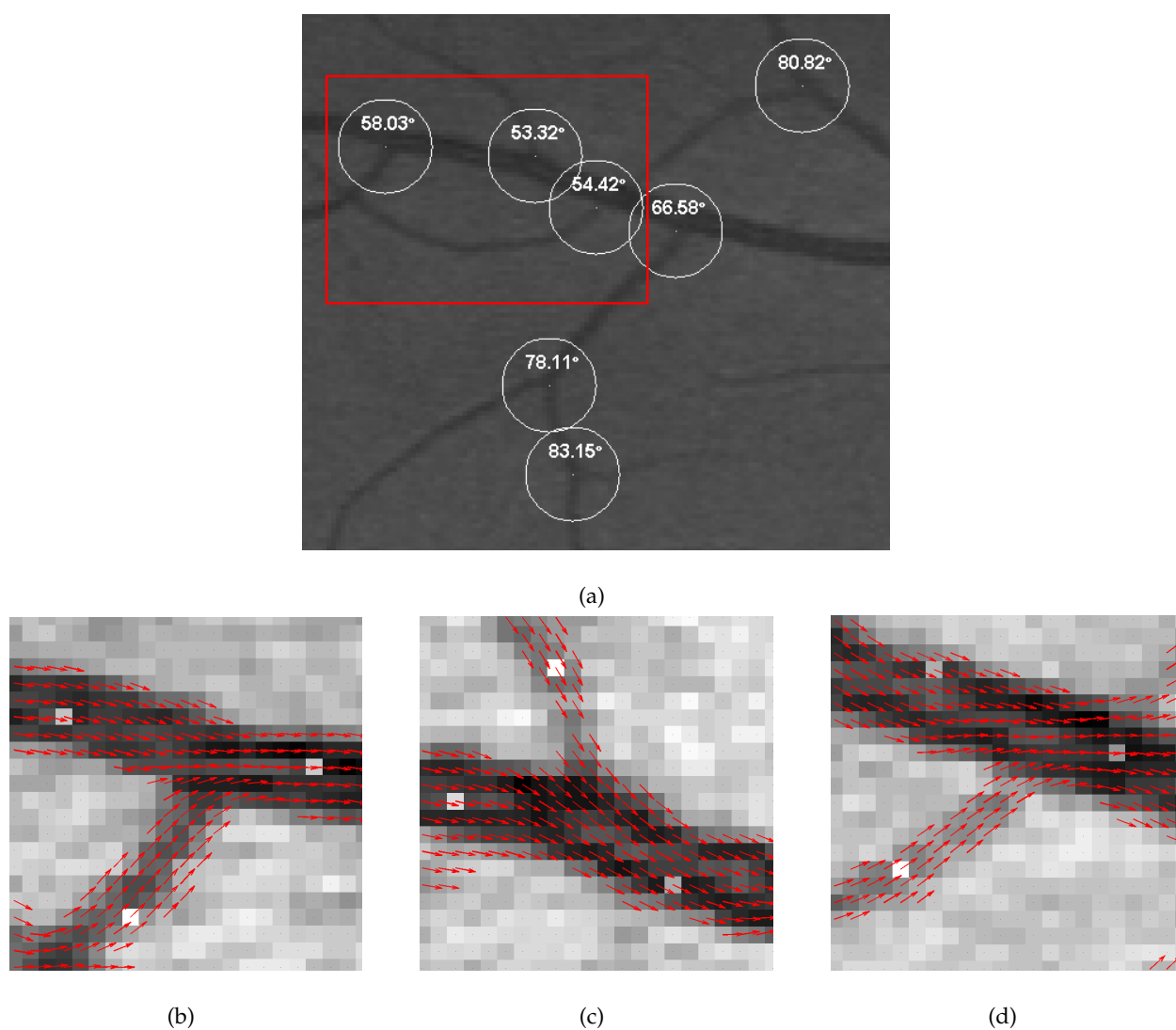


Figura 3.8: (a) Ángulos de las bifurcaciones. (b)-(d) Zoom con los campos vectoriales de orientaciones utilizados para calcular el ángulo de las orientaciones.

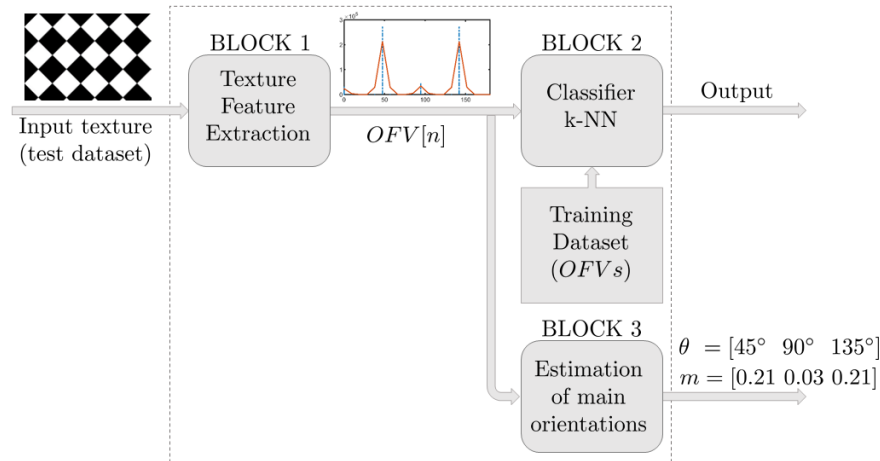


Figura 3.9: Representación esquemática del método propuesto.

En este artículo se propone un nuevo e intuitivo método para el análisis y clasificación de texturas mediante la extracción de la información estructural de las imágenes. El objetivo es caracterizar una determinada textura mediante la información de las orientaciones existentes en la textura. El método propuesto es inmune a la rotación de las texturas y presenta gran robustez frente a cambios de iluminación y escala, así como a diferentes tipos de ruido.

Para realizar la caracterización de las texturas, en primer lugar se extraen los contornos de éstas. Sobre la imagen de los contornos se realiza una descomposición de la imagen mediante una determinada familia de filtros orientados formando un objeto donde cada uno de los cortes de dicho volumen contiene solo un sub-grupo de estructuras cuya orientación se corresponde con la de una determinada rama del banco de filtros, estos son los dos primeros bloques del marco de trabajo propuesto. Finalmente, las respuestas de cada una de las ramas del filtro son cuantificadas y recogidas en un vector de densidad, al cual denominamos vector de características de orientación. Con este vector de características ya es posible, por un lado, usarlo sin ningún tipo de procesamiento en aplicaciones de clasificación, o por otro lado, con una etapa adicional de procesamiento extraer características de más alto nivel, por ejemplo, en este trabajo se propone usarlo para obtener las orientaciones predominantes y cuantificar la magnitud de cada una de ellas respecto al resto (ver Figura 3.9).

Los resultados de este método de extracción y clasificación de características han sido comparados en este trabajo con los métodos más importantes del estado del arte, mostrándose el método propuesto muy robusto ante diferentes cambios de iluminación, rotación, así como extremadamente inmune al ruido; mejorando en este caso al resto de métodos con los que han sido comparados, tal y como se puede observar en la Tabla 3.1 para la base de datos Brodatz y en la Tabla 3.2 para la base de datos Outex.

Ruido Gaussiano (σ^2)	0.1	0.5	1	5	10	50
$LBP_{24,3}^{riu2}/VAR_{24,3}$	97.78	74.44	60.55	40.27	31.94	8.33
$LFD_{24,3}$	100	100	97.50	63.88	39.27	16.11
Propuesto (DO)	97.55	93.78	90.13	59.49	50.12	19.72
Propuesto (ANDD)	92.55	90.83	90.38	74.72	49.16	9.16
Propuesto (Cake)	91.94	91.11	90.83	78.33	59.16	10
Ruido impulsivo (σ)	0.01	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125
$LBP_{24,3}^{riu2}/VAR_{24,3}$	95	69.72	57.50	50.27	46.94	36.47
$LFD_{24,3}$	100	98.61	85.27	64.16	55.42	40.55
Propuesto (DO)	97.55	96.38	88.77	69.16	63.89	61.94
Propuesto (ANDD)	90.55	88.88	86.66	83.05	73.33	62.22
Propuesto (Cake)	91.38	91.11	86.11	79.16	76.64	71.11

Tabla 3.1: Porcentaje de clasificación en la base de datos Brodatz para diferentes fuentes y niveles de ruido. En el caso de ruido Gaussiano, σ^2 es la varianza del ruido en un rango de [0 a 255], en el caso de ruido impulsivo, σ es la densidad de ruido

Ruido Gaussiano (σ^2)	0.1	0.5	1	5	10	50
$LBP_{24,3}^{riu2}/VAR_{24,3}$	89.34	75.98	60.24	22.51	11.72	8.12
$LFD_{24,3}$	92.11	90.85	88.74	47.12	22.66	11.25
Propuesto (DO)	84.69	84.51	79.14	48.43	18.12	7.12
Propuesto (ANDD)	85.10	84.58	85.83	49.16	28.33	12.50
Propuesto (Cake)	87.08	87.90	86.66	50.83	31.66	13.74
Ruido impulsivo (σ)	0.01	0.025	0.05	0.075	0.1	0.125
$LFD_{24,3}$	93.12	90.84	74.67	59.17	39.06	27.91
$LBP_{24,3}^{riu2}/VAR_{24,3}$	89.43	70.37	55.42	33.75	21.00	9.53
Propuesto (DO)	85.14	85.24	79.64	74.64	65.12	59.87
Propuesto (ANDD)	86.92	85.38	78.10	76.11	70.34	65.12
Propuesto (Cake)	88.63	86.47	83.12	80.04	76.91	70.73

Tabla 3.2: Porcentaje de clasificación en la base de datos Outex para diferentes fuentes y niveles de ruido.

3.6. Artículo 6: Adaptive spatially variant morphological filters based on a multiple orientation vector field.

Álvar-Ginés Legaz-Aparicio, Rafael Verdú-Monedero, Jesús Angulo, "Adaptive spatially variant morphological filters based on a multiple orientation vector field", *Mathematical mo-*

delling in Engineering & Human Behaviour 2016.

En este artículo se propone la aplicación de la estimación de orientación para construir operadores morfológicos variantes en el espacio. El objetivo de este trabajo es crear operadores que sean capaces de adaptar su forma y orientación a los contornos de los objetos contenidos en una imagen. Este campo de aplicación ya ha sido tratado por diversos autores [17, 34, 53, 62, 64] a lo largo de los años. Sin embargo, todos estos autores solo han tenido en cuenta el uso de métodos de orientación simple, como son ASG o el tensor estructural. Si bien la estimación de orientaciones simples muestra buenos resultados en estructuras con una única orientación predominante, permitiendo adaptar los operadores morfológicos a dichas estructuras, no considera la existencia de estructuras con varias orientaciones predominantes, como es el caso de bifurcaciones o cruces de estructuras. Como principal aportación de este artículo se propone el uso de la estimación de orientaciones múltiples para generar operadores morfológicos capaces solventar estas vulnerabilidades.

Basándonos en varias propiedades morfológicas es posible definir elementos estructurales que sean capaces de adaptar su forma y orientación según la orientación de las estructuras. Esta es la aproximación típica usada para generar operadores morfológicos variantes en el espacio según la orientación. En el caso de los operadores morfológicos que solo tienen en cuenta la orientación simple los elementos estructurales se definen de la siguiente forma:

$$\mathcal{S}(x) = \mathcal{E}^{\theta(x), d(x)}, \quad (3.1)$$

donde $\mathcal{S}(x)$ es el elemento estructural, \mathcal{E} es la función de forma, la cual puede ser un rectángulo, una elipse, etc., $\theta(x)$ es la orientación asociada al píxel x y $d(x)$ la distancia a la estructura más cercana.

En el caso de nuestra propuesta basada en orientación múltiple, se define un elemento estructural como la unión de M elementos estructurales, siendo M el número de orientaciones predominantes que presenta cada píxel, quedando la expresión del elemento estructural variante en el espacio de la siguiente forma:

$$\mathcal{A}(x) = \bigcup_{1 \leq i \leq M} \mathcal{E}^{\theta_i(x), d(x)}. \quad (3.2)$$

Gracias a esta nueva definición de los elementos estructurales es posible generar operadores morfológicos que se adapten mejor a todo tipo de estructuras, tal y como puede observarse en la Figura 3.10 y en la Tabla 3.3.

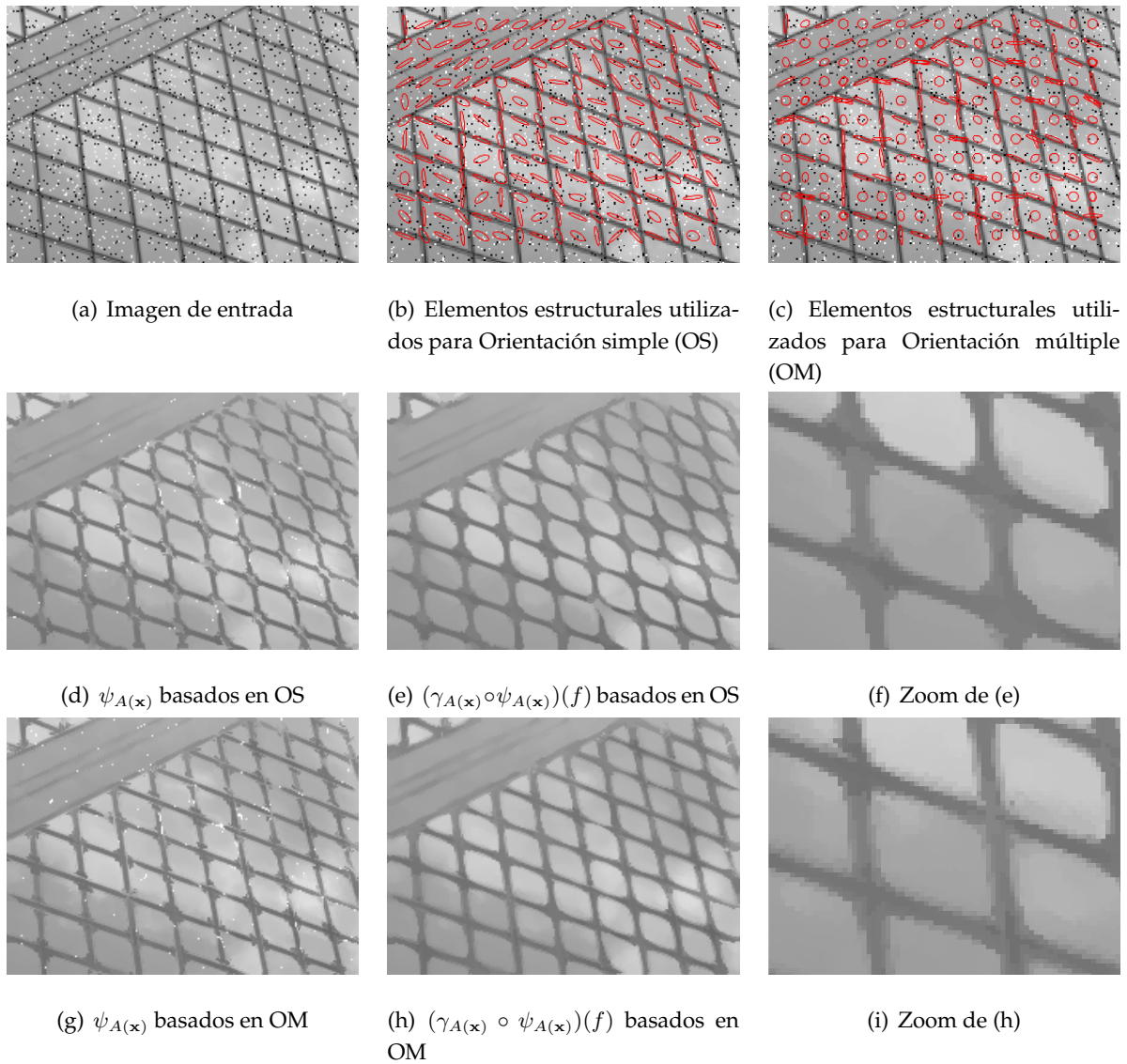


Figura 3.10: Resultados visuales de los operadores morfológicos basado en campos vectoriales de orientación simple y orientación múltiple.

	PSNR(dB)	SSIM
Noisy image	18.43	69.57
Closing	PSNR(dB)	SSIM
LST	19.23	64.22
Proposed method	19.69	70.58
Opening-Closing	PSNR(dB)	SSIM
LST	21.08	72.57
Proposed method	22.04	78.26

Tabla 3.3: Resultados numéricos de la Fig.3.10.

3.7. Artículo 7: Adaptive morphological filters based on a multiple orientation vector field dependent on image local features.

A.G. Legaz-Aparicio, R. Verdú-Monedero, J. Angulo, "Adaptive morphological filters based on a multiple orientation vector field dependent on image local features", *Journal of Computational and Applied Mathematics*, Vol. 330, pp. 965-981, March 2018. ISI-JCR(2017): 1.632, Posición 49 de 252 (T1, Q1), cat MATHEMATICS, APPLIED.

En este artículo se continúa con el estudio de la morfología variante en el espacio basada en orientaciones múltiples. En este caso, basándose en los conceptos descritos anteriormente, se presenta una nueva formulación de la morfología matemática basada en elementos estructurales variantes en el espacio. Tras realizar una revisión de los operadores morfológicos básicos dilatación y erosión en sus versiones invariantes en el espacio,

$$\begin{cases} \delta_b(f)(x) = (f \oplus b)(x) = \sup_{y \in E} \{f(y) + b(y - x)\}, \\ \varepsilon_b(f)(x) = (f \ominus b)(x) = \inf_{y \in E} \{f(y) - b(y + x)\}, \end{cases} \quad (3.3)$$

así como la aplicación secuencial de estos, apertura y cierre

$$\begin{cases} \gamma_b(f)(x) = (f \circ b)(x) = ((f \ominus b) \oplus b)(x) = \sup_{z \in E} \inf_{y \in E} \{f(y) - b(y - z) + b(z - x)\}, \\ \varphi_b(f)(x) = (f \bullet b)(x) = ((f \oplus b) \ominus b)(x) = \inf_{z \in E} \sup_{y \in E} \{f(y) + b(z - y) - b(x - z)\}, \end{cases} \quad (3.4)$$

invariantes en el espacio, se presenta una nueva formulación de éstos, para adaptarlos a elementos estructurales variantes en el espacio. Las nuevas expresiones de los operadores variantes en el espacio quedan de la siguiente forma:

$$\delta_{\mathcal{A}}(f)(\mathbf{x}) = (f \oplus \mathcal{A})(\mathbf{x}) = \bigvee_{\mathbf{y} \in \mathcal{A}(\mathbf{x})} f(\mathbf{x} - \mathbf{y}), \quad (3.5)$$

$$\xi_{\mathcal{A}}(f)(\mathbf{x}) = (f \ominus \mathcal{A})(\mathbf{x}) = \bigwedge_{\mathbf{y} \in \mathcal{A}(\mathbf{x})} f(\mathbf{x} + \mathbf{y}), \quad (3.6)$$

para la dilatación y erosión. Los operadores $\delta_{\mathcal{A}}$ y $\xi_{\mathcal{A}}$ son adjuntos dado que el elemento estructural está derivado unicamente de la imagen de entrada. Por lo tanto, los operadores apertura y cierre pueden ser definidos como

$$\gamma_{\mathcal{A}(\mathbf{x})} = (\delta_{\mathcal{A}} \circ \xi_{\mathcal{A}})(f), \quad (3.7)$$

$$\psi_{\mathcal{A}(\mathbf{x})} = (\xi_{\mathcal{A}} \circ \delta_{\mathcal{A}})(f), \quad (3.8)$$

respectivamente.

Una vez que ya se disponen de las herramientas básicas de morfología matemática variante en el espacio, es posible definir operadores más complejos por medio de la aplicación secuencial o

alternada de estos operadores. En esta sección se proponen los filtros alternados apertura seguido de cierre y cierre seguido de apertura, los cuales presentan muy buenas prestaciones eliminando artefactos oscuros o brillantes (ruido impulsivo) de imágenes. Por un lado, el filtro alternado cierre-apertura se define como

$$CO_{A(x)}(f)(x) = (\psi_{A(\mathbf{x})} \circ \gamma_{A(\mathbf{x})})(f), \quad (3.9)$$

y por otro lado, el filtro alternado apertura-cierre se define como

$$OC_{A(x)}(f)(x) = (\gamma_{A(\mathbf{x})} \circ \psi_{A(\mathbf{x})})(f). \quad (3.10)$$

Para finalizar este artículo, se estudian las prestaciones de los nuevos filtros morfológicos formulados con sus versiones basadas en orientación simple (ver Figura 3.11), con otros tipos de filtros morfológicos adaptativos para aplicaciones de filtrado de ruido, como son el caso de los filtros bilaterales morfológicos (ver Figura 3.12 y 3.13) o para aplicaciones de unión de estructuras (ver Figura 3.14)

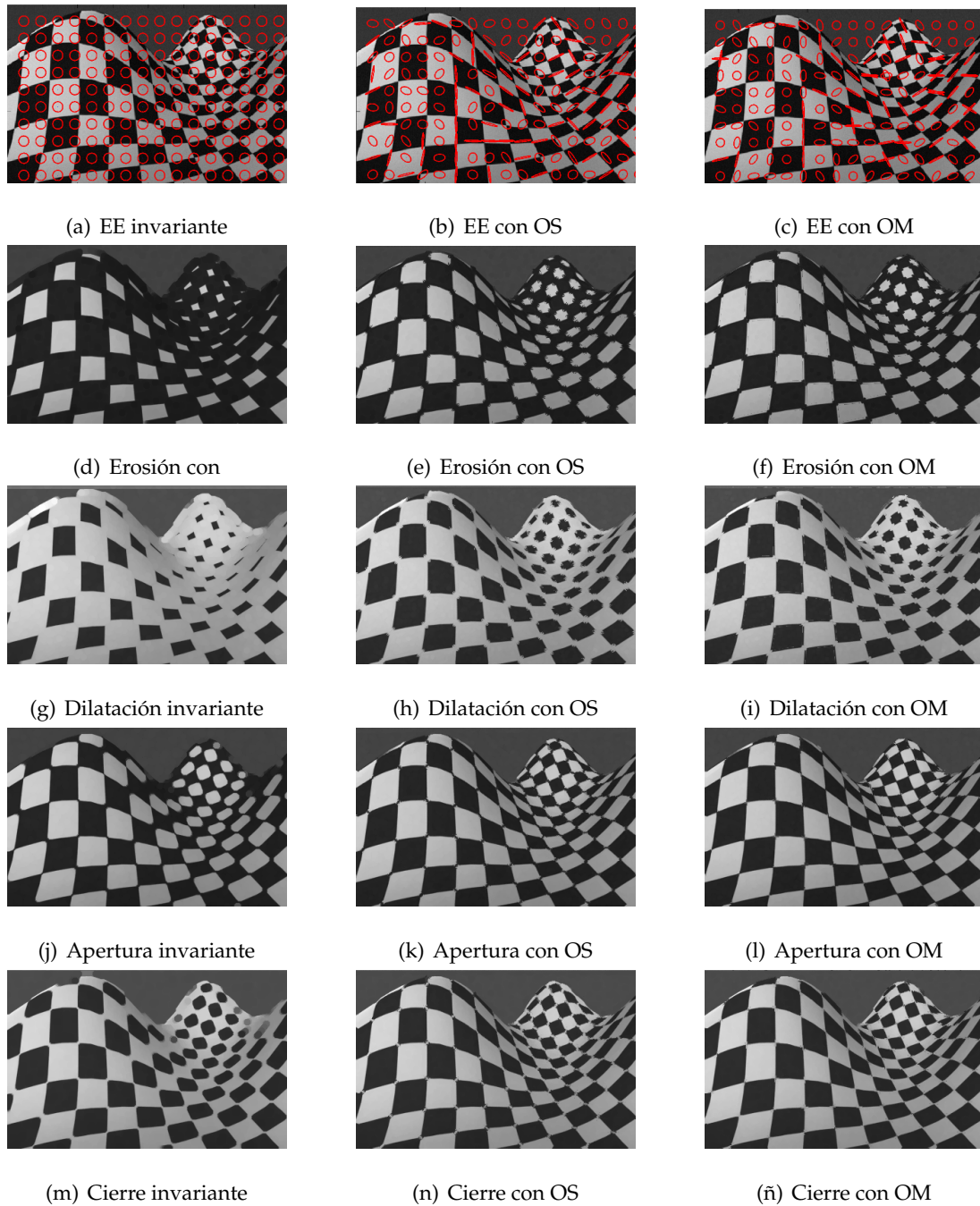


Figura 3.11: Comparativa de operadores morfológicos básicos (erosión, dilatación, apertura y cierre) en sus versiones invariantes y variantes en el espacio. Primera columna: versión invariante en el espacio. Segunda columna: versión variante en el espacio considerando el campo vectoriales de orientación simple. Tercera columna: versión variante en el espacio considerando campo de orientación múltiples propuesto y elementos estructurales formados por la unión de varias elipses orientadas.

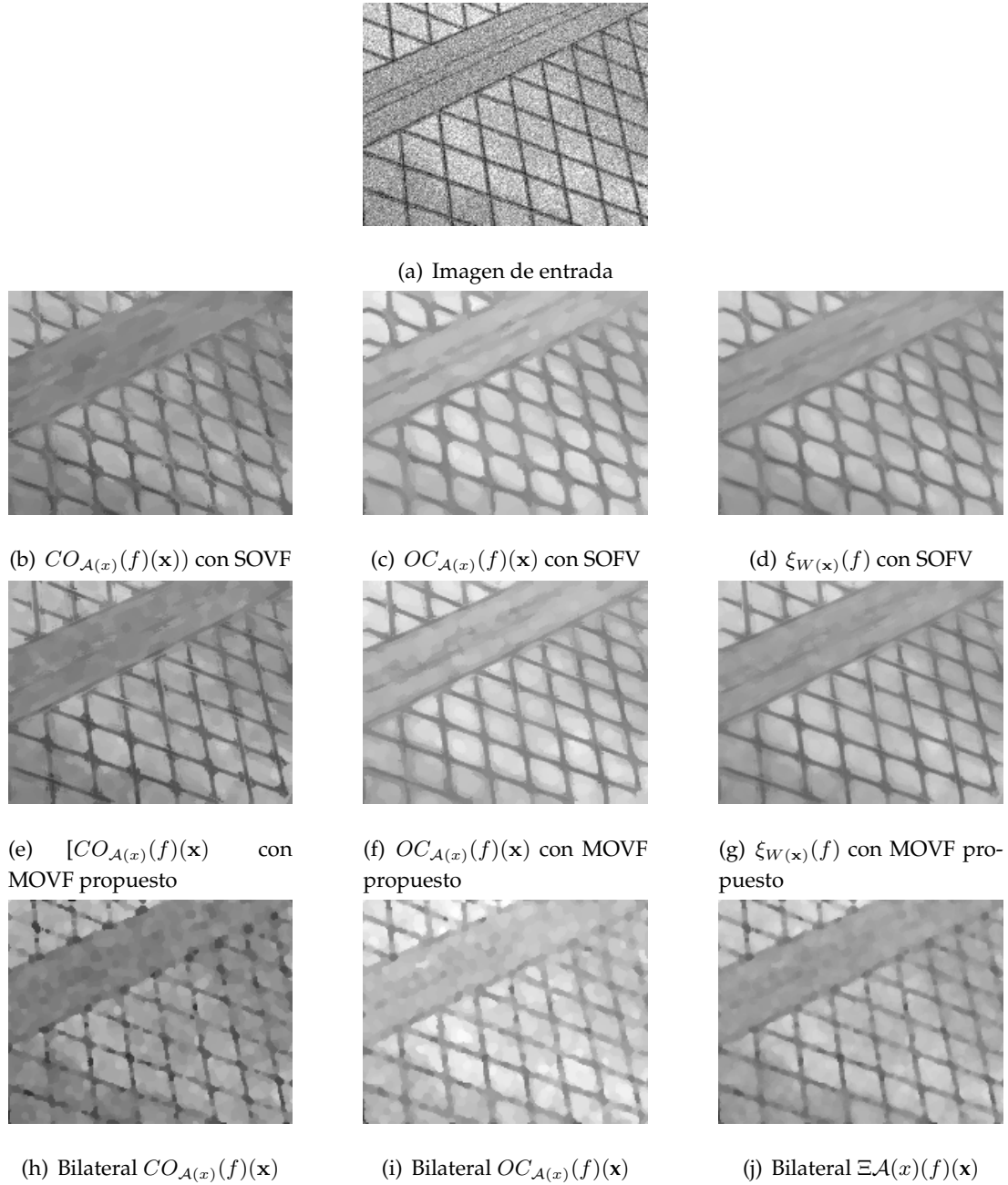


Figura 3.12: Comparativa de filtros morfológicos adaptativos. La primera línea muestra la imagen de entrada corrupta. La segunda fila muestra las imágenes filtradas usando operadores basados un campo vectorial de orientaciones simple, la tercera fila muestra las imágenes filtradas usando un campo de orientación múltiple y la cuarta fila muestra la salida de estos filtros usando aproximación bilateral. La primera columna contiene las respuestas de los filtros adaptativos cierre-apertura, la segunda columna contiene las respuestas de los filtros adaptativos apertura-cierre, y la tercera columna muestra la respuesta del filtro alternado.

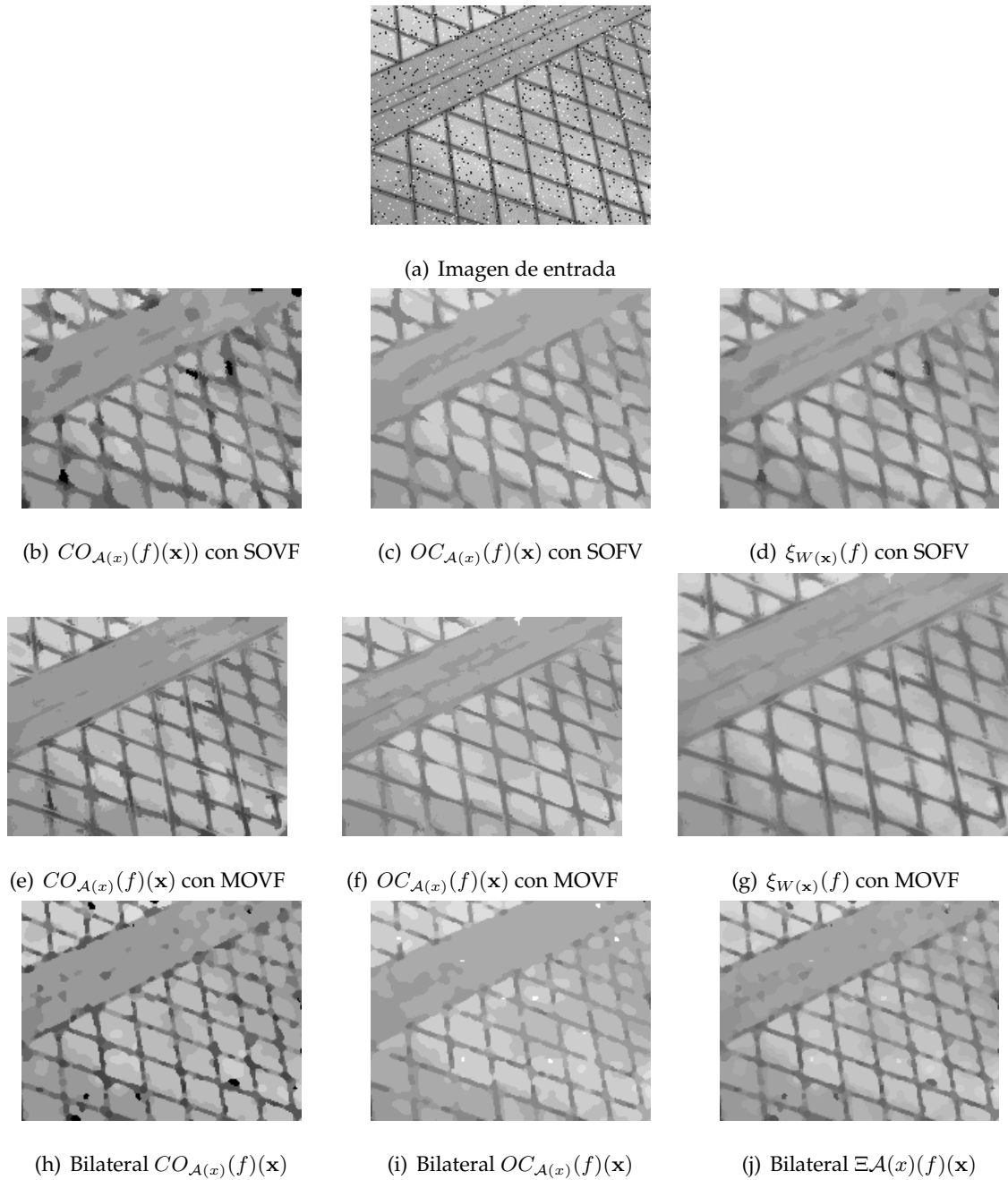


Figura 3.13: Comparativa de filtros morfológicos adaptativos. La primera línea muestra la imagen de entrada corrupta. La segunda fila muestra las imágenes filtradas usando operadores basados un campo vectorial de orientaciones simple, la tercera fila muestra las imágenes filtradas usando un campo de orientación múltiple y la cuarta fila muestra la salida de estos filtros usando aproximación bilateral. La primera columna contiene las respuestas de los filtros adaptativos cierre-apertura, la segunda columna contiene las respuestas de los filtros adaptativos apertura-cierre, y la tercera columna muestra la respuesta del filtro alternado.

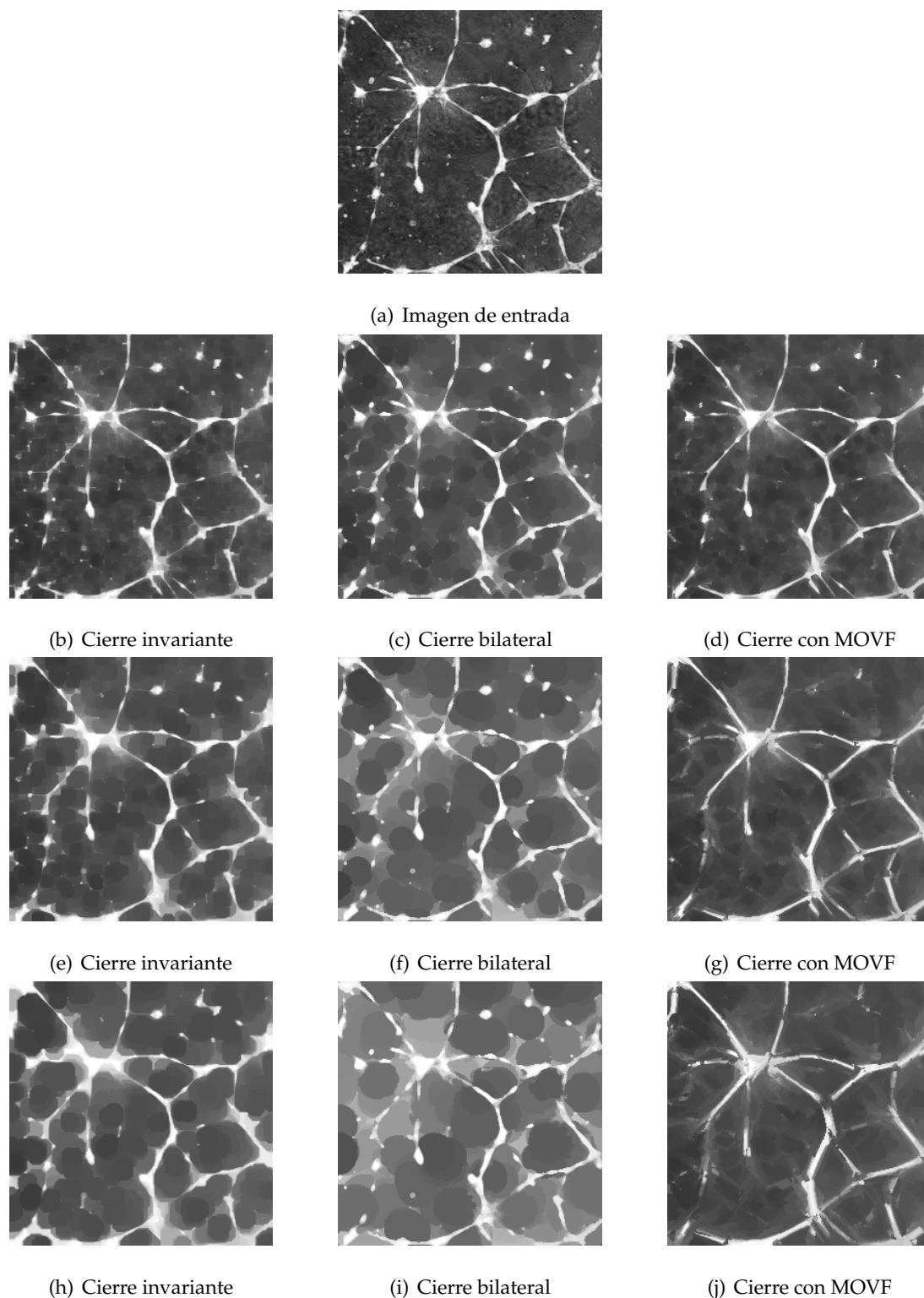


Figura 3.14: Comparativa de cierres con diferentes tamaños de elemento estructural. Imagen de entrada: tamaño 256×256 píxeles en escala de grises. Esta figura ilustra la habilidad de los operadores variantes en el espacio basados en estimación de orientación para adaptar su forma a bordes alargados con orientación arbitraria.

4 Conclusiones y trabajo futuro

4.1. Conclusiones

En esta Tesis se ha realizado una revisión de los métodos de estimación de orientaciones, abordando las aplicaciones más importantes y los métodos más relevantes que pueden encontrarse en la literatura actual. A su vez, se ha propuesto una posible clasificación de los métodos de estimación de orientaciones atendiendo al tipo de orientación obtenida: orientación simple, donde solo se tiene en cuenta una única orientación en cada pixel de la imagen, o orientación múltiple, donde se tienen en cuenta todas las orientaciones asociadas a cada pixel. A lo largo de este trabajo ha quedado en evidencia la gran cantidad de métodos de estimación existente, así como la necesidad de una aproximación al proceso de estimación sistemática e independiente de la aplicación.

Una de las principales aportaciones de esta Tesis es la propuesta de un marco teórico de estimación de orientaciones capaz de sistematizar el proceso de estimación y hacerlo independiente del tipo de aplicación. El funcionamiento básico del marco propuesto consiste en descomponer las estructuras de una imagen mediante un banco de filtros orientados. La respuesta de cada uno de los filtros del banco genera una *sub-imagen* que únicamente contiene las estructuras de con la misma orientación que el filtro en cada rama. Seguidamente las respuestas de cada una de las ramas de los filtros son filtradas paso bajo para extender la información a todos los píxeles de la imagen. Finalmente, mediante un algoritmo de búsqueda se extraen las orientaciones más importantes de cada píxel, proporcionando el campo vectorial de orientaciones múltiples de la imagen. Como puede observarse esta herramienta es capaz de salvar las limitaciones presentes hasta ahora por los métodos de estimación de orientación simple.

Este nuevo marco teórico presenta diferentes ventajas tales como:

- Capacidad de realizar estimación múltiple.
- Capacidad para disponer de diferentes familias de filtros, permitiendo una mejor adecuación al tipo de imagen.
- Gran robustez frente a distintos tipos de ruido y cambios de iluminación.

- Independencia del tipo de aplicación e imagen.

Sin embargo, el marco propuesto presenta varias desventajas o limitaciones.

- El coste computacional es proporcional al número de ramas que presenta el banco de filtros. A su vez el número de ramas del banco de filtros determina la resolución angular de los vectores del campo de orientaciones estimado e incrementa el coste de la etapa de búsqueda de picos. Por lo tanto, una campo vectorial de orientaciones con una alta resolución angular implica un elevado coste computacional. Además, una alta resolución angular implica respuestas en el espacio de gran tamaño y por tanto también deberán de ser de ese tamaño las estructuras cuya orientación quiera estudiarse.
- El manejo de gran cantidad de información que aporta la estimación de orientaciones múltiple convirtiéndose éste en un paso previo fundamental para la realización de cualquier aplicación basada en orientaciones múltiples.
- La adecuada elección de los parámetros de entrada es un proceso manual de ensayo y error, pudiendo resultar bastante tedioso en algunos casos.

La segunda gran aportación de esta Tesis son los casos prácticos de aplicación de la estimación de orientaciones. A tenor de los resultados obtenidos se puede observar como la estimación de orientación es una formidable herramienta para gran cantidad de aplicaciones.

En el campo de aplicaciones médicas, concretamente en el estudio de los árboles de venas contenidos en la retina, la estimación de orientaciones combinada con otras técnicas de procesado muestra excelentes resultados en la detección de bifurcaciones y cruces de venas, consiguiendo grandes tasas de detección que mejoran los resultados obtenidos por otros métodos del estado del arte. En estas aplicaciones, la aparición de falsos positivos que corresponden a zonas de alta curvatura de las venas o sus terminaciones representan el principal inconveniente. Afortunadamente se han podido desarrollar técnicas de procesado que han sido capaces de reducir en gran medida el número de falsos positivos.

En aplicaciones sobre texturas de imagen, puede ser utilizada para caracterizar y clasificar texturas de forma muy robusta al ruido. El método propuesto muestra porcentajes de clasificación muy similares a los obtenidos por métodos de caracterización muy conocidos como los LBPs en imágenes con bajo ruido y mejorando a estos conforme el nivel de ruido de las imágenes es mayor. El principal inconveniente es la dependencia que presenta la información estructural, siendo menor su efectividad en imágenes sin estructuras claras o con orientaciones caóticas.

En último lugar, la aplicación del marco teórico de estimación a la morfología matemática variante en el espacio ha permitido mejorar los operadores morfológicos basados en orientación

Compendio de artículos

- Artículo 1: A.G. Legaz-Aparicio, R. Verdú-Monedero, J. Angulo, “Multiscale Estimation of Multiple Orientations based on Morphological Directional Openings”, Signal, Image and Video Processing, 2018, Accepted, (doi:10.1007/s11760-018-1276-y). ISI-JCR(2017): 1.643, Posición 163 de 260 (T2, Q3), cat ENGINEERING, ELECTRICAL & ELECTRONIC.

- Artículo 2: Álar-Ginés Legaz-Aparicio, Rafael Verdú-Monedero, Juan Morales-Sanchez, Jorge Larrey-Ruiz, Jesús Angulo, "Detection of Retinal Vessel Bifurcation by Means of Multiple Orientation Estimation Based on Regularized Morphological Openings". XIII Medierranean Conference on Medical and Biological Engineering and Computing, Sevilla, 2013.

- Artículo 3: S. Morales, Á. Legaz-Aparicio, V. Naranjo, R. Verdú-Monedero, “Determination of Bifurcation Angles of the Retinal Vascular Tree through Multiple Orientation Estimation based on Regularized Morphological Openings”, International Conference on Bio-inspired Systems and Signal Processing (BIOSIGNALS 2015), Lisbon (Portugal), January 2015.

Determination of Bifurcation Angles of the Retinal Vascular Tree through Multiple Orientation Estimation based on Regularized Morphological Openings

Sandra Morales^{1,2}, Álgar-Ginés Legaz-Aparicio³, Valery Naranjo^{1,2} and Rafael Verdú-Monedero³

¹*Instituto Interuniversitario de Investigación en Bioingeniería y Tecnología Orientada al Ser Humano, Universitat Politècnica de València, I3BH/LabHuman, Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, Spain*

²*Grupo Tecnologías de Informática Aplicadas a la Oftalmología, Unidad Conjunta UPV- FISABIO, Valencia, Spain*

³*Universidad Politécnica de Cartagena, Cartagena, Spain*

Keywords: Retinal Image, Bifurcation Angle, Multiple Orientation Estimation, Regularized Morphological Opening.

Abstract: This paper describes a new approach to compute bifurcation angles in retinal images. This approach is based on the estimation of multiple orientations at each pixel of a gray retinal image. The main orientations are provided by directional openings whose outputs are regularized in order to extend the orientation information to the whole image. The detection of vessel bifurcations is based on the coexistence of two or more than two different main orientations at the same pixel. Once the bifurcations and crossovers has been identified, bifurcation angles are calculated. The proposed procedure of computing bifurcation angles by means of orientation estimation at all pixels of the gray level image is much more stable than those methods which are based on the skeleton of the vascular tree, since a slight variation of a pixel of the skeleton can produce a significant change in the angle value.

1 INTRODUCTION

Retinal vasculature is able to indicate the status of other vessels of the human body. Its study involves a non-invasive or minimally invasive procedure and, usually, it is included in the standard screening of any patient with diseases in which the vessels may be altered. Specifically, the identification and study of bifurcations and crossovers has great significance in cardiovascular diseases as well as in their early detection (Azzopardi and Petkov, 2011). Moreover, vascular changes produced in systemic diseases usually induce particular modifications in the vessels, such as changes in bifurcation angles. Based on this fact, this paper is focused on automatically determining the bifurcation angles calculated on vessel bifurcations previously detected. There are two approaches to detect vessel bifurcations: methods based on geometrical features and methods based on models (Abramoff et al., 2010). The method proposed in this paper belongs to the first group. In particular, the detection of vessel bifurcations is addressed by analyzing a multiple orientation vector field provided by the regularization of directional morphological openings. The orientation field is given by a directional signature

(Soille and Talbot, 2001) for each pixel using a set of directional openings with a line segment. Then, the orientation of a pixel is defined as the one associated to the directional opening which produces the maximum value of the signature of this pixel. Nevertheless, the original approach from (Soille and Talbot, 2001) does not deal with the multiple orientation case and does not take into account that, locally, pixels in natural images can be associated to more than one orientation, e.g., crossing lines, corners and junctions (also known as X-, L- and Y-junctions, respectively). To determine not only the main direction but all the significant orientations, the directional signature is analyzed in the present work using multiple peak detection on the curve interpolated by b-splines. Thanks to the estimation of the main orientations of each bifurcation point of the retinal images, the angles generated by the vessels on all of them can be analyzed.

In the literature, the most common approach to detect retinal tree bifurcations and their corresponding bifurcation angles is through the analysis of the segmented vascular tree. In general, this segmentation can be performed by matched filters (Chaudhuri et al., 1989), by region growing and scale-space anal-

ysis (Martínez-Pérez et al., 1999), by mathematical morphology (Zana and Klein, 2001), etc. Regarding the detection of vessel bifurcations and crossovers on segmented retinal images it can be done, e.g., by using a set of trainable keypoint detectors and a bank of Gabor filters (Azzopardi and Petkov, 2013), or with matched filters (Ardizzone et al., 2008). The measurement of the bifurcation angles is usually carried out fitting the segmented vessels, or their skeleton, by straight lines and then estimating the angle between them (Gao et al., 2000; Martinez Perez et al., 2002; MacGillivray et al., 2012). Segmentation-dependent results are the major drawback of this approach: a slight variation of a pixel in the skeleton results can produce a significant change in the angle value, even of several degrees.

This paper is organized as follows: Section 2 firstly addresses the method to estimate multiple orientations at each pixel, and then the approach followed to detect the bifurcations and crossovers in retinal images together with the calculation of the bifurcation angles is described. Section 3 shows the results of the proposed method in a public database. Finally, Section 4 closes the paper with the conclusions and future work lines.

2 METHOD

The goal of this paper is to propose a new method to compute bifurcation angles of the retinal tree from a gray image without resorting to the skeletonization of a segmented (binary) image. For that purpose, three stages are necessary: estimation of the multiple orientation vector field, detection of bifurcations and crossovers and, finally, the measurement of the desired angles. The key of the method is the way to estimate the multiple orientations existing in a fundus image. The algorithm proposed to carried out this estimation is depicted in Figure 1. This approach differs from (Angulo et al., 2011), where the multiple main orientations are estimated by analysing a block of the image, whereas in this paper the multiple orientations are estimated at each pixel.

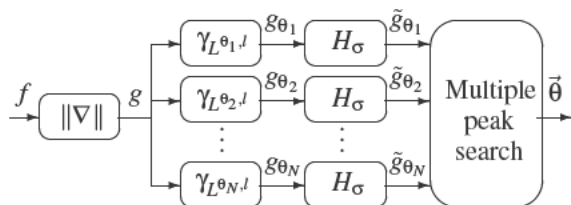


Figure 1: Flowchart of the multiple orientation estimation method.

2.1 Multiple Orientation Estimation

Let $f(\mathbf{x}) : E \rightarrow \mathbb{R}$ be a gray-level image, where the support space is $E \subset \mathbb{Z}^2$ and the pixel coordinates are $\mathbf{x} = (x, y)$. Let us define $g(\mathbf{x})$ as the absolute value of the gradient of $f(\mathbf{x})$, i.e.,

$$g(\mathbf{x}) = \|\nabla f(\mathbf{x})\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2}. \quad (1)$$

The directional opening of $g(\mathbf{x})$ by a linear (symmetric) structuring element (SE) of length l and direction θ is defined as the directional erosion of g by $L^{\theta,l}$ followed by the directional dilation with the same SE (Verdú-Monedero et al., 2011):

$$\gamma_{L^{\theta,l}}(g)(\mathbf{x}) = \delta_{L^{\theta,l}}[\epsilon_{L^{\theta,l}}(g)](\mathbf{x}), \quad (2)$$

where the directional erosion and dilation are respectively

$$\epsilon_{L^{\theta,l}}(f)(\mathbf{x}) = \bigwedge_{\mathbf{h} \in L^{\theta,l}(\mathbf{x})} \{f(\mathbf{x} + \mathbf{h})\}, \quad (3)$$

$$\delta_{L^{\theta,l}}(f)(\mathbf{x}) = \bigvee_{\mathbf{h} \in L^{\theta,l}(\mathbf{x})} \{f(\mathbf{x} - \mathbf{h})\}. \quad (4)$$

The proposed orientation model is based on a decomposition of the gradient information by families of linear openings, $\{\gamma_{L^{\theta_i,l}}\}_{i \in I}$, according to a particular discretization of the orientation space $\{\theta_i\}_{i \in I}$.

In the next step of the proposed method, a filtering is performed at each one of the directional openings (depicted as H_σ in Figure 1). The filtering diffuses the orientation information and avoids angle mismatches due to noise. The kernel H_σ is the sampling of the gaussian low-pass filter

$$H_\sigma(\omega_1, \omega_2) = e^{-\frac{\sigma^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2}}, \quad (5)$$

where σ is the spatial standard deviation of the filter. More details of the method can be found in (Legaz-Aparicio et al., 2014).

Once the directional openings have been filtered, the directional signature at pixel \mathbf{x} is defined as

$$s_{\mathbf{x},l}(i) = \tilde{g}_{\theta_i}(\mathbf{x}). \quad (6)$$

Then, $s_{\mathbf{x},l}(i)$ is interpolated using cubic b-splines and its maxima correspond to the multiple orientations existing at pixel \mathbf{x} . Finally, collecting all the orientations estimated at all the pixels in the image provides the multidimensional vector field $\vec{\theta}(\mathbf{x})$.

2.2 Detection of Bifurcations and Crossovers

The method previously presented can be applied to a gray or on a binary image. The resulting orientation vector field can be used then to detect the existing bifurcations and crossovers of the retinal tree

(see Figure 2). In general, most of the methods which detect significant points of a vascular tree are based on a previously segmented, and therefore binary, image. In this paper, the segmentation stage is skipped and the method is applied directly to a gray image, avoiding the segmentation result dependence. However, the method can also be applied to a segmented image, providing a better orientation field due to the binarization of the image.

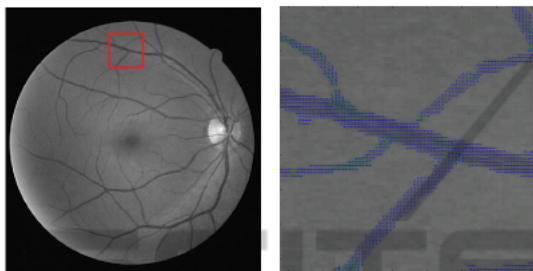


Figure 2: Left: real retinal image. Right: close-up of the image with its estimated multiple orientation vector field.

The detection procedure takes into account only the two main orientations at each pixel. The method considers that a bifurcation or crossover exists if two conditions happen. The first condition is that the magnitude of the regularized opening has to be greater than a threshold, $|\tilde{g}_{\theta_i}| > th$. The second condition to be fulfilled is that the two main orientations must differ more than $2\Delta\theta$, where $\Delta\theta$ is the angular resolution of the multiple orientation estimation method. After processing these two conditions, a refinement stage is necessary to reduce false positives and then to discriminate between bifurcations or crossings and high curvature areas.

2.3 Classification of Detected Points

In order to determine which interest points are bifurcations and crossovers and which ones are high curvature areas, a control area around each point of interest is established. The control area is a window with circular shape centred in the point of interest. The radius of the window must be large enough to contain the vessels belonging to the point of interest. At this stage, a coarse segmentation based on a top-hat morphological filter followed by a threshold is performed. The aim of this segmentation is to speed up the classification stage.

The classification is carried out by placing a circular window at the interest point and analyzing the number of branches that cross the circle defined by the mask. According to the number of branches that cross the circle, the points of interest are classified

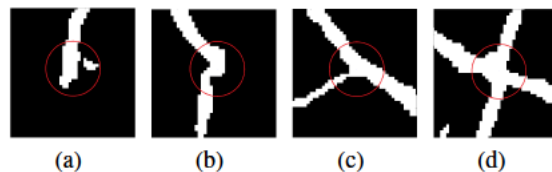


Figure 3: Circular windows placed at different detected interest points with two main orientations.

into four types:

- If there is only one branch, the point of interest is a vessel termination (see Figure 3(a)).
- If there are two branches, the point of interest is a vessel with high curvature (see Figure 3(b)).
- If there are three branches (in general, an odd number greater than one), the point of interest will be a bifurcation (see Figure 3(c)).
- Finally, if there are four branches (in general, an even number greater than two), the point of interest will be a crossover (see Figure 3(d)).

Since we are interested in detecting bifurcations and crossovers, only the points of interest whose mask is crossed by more than two branches will be considered. Figure 4(a)-(b) show the detected interest points and Figure 4(c)-(d) show the bifurcations and crossover after the classification stage.

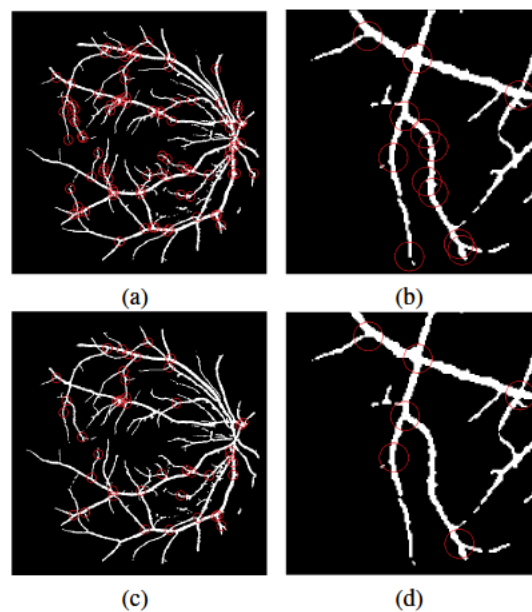


Figure 4: (a) Detection of interest points: bifurcations, crossings and high curvature areas. (b) Close-up of (a). (c) Bifurcations after the classification. (d) Close-up of (c).

2.4 Measurement of Bifurcation Angles

Once the bifurcations have been classified, it is possible to measure the bifurcation angles. The angle is calculated by performing the difference between the orientation vectors of each branch. From the intersection of the circular window and the branch, an interior point is chosen as representative of this branch, and its orientation vector will define the orientation of the branch at this pixel. Note that the choice of this pixel is not critical since the orientation vector field varies slowly inside the vessel. Due to the discretization of the orientation space of the multiple orientation method, the orientation is estimated using the ASGVF method (Verdú-Monedero et al., 2011) which achieves a higher angular resolution. Since the ASGVF method only estimates the orientation and it is defined between -90° and 90° degrees, the direction of each vector can be obtained taking into account the location of the representative pixel of each branch in relation to the centre of the bifurcation. Considering the quadrant of the representative pixel, the direction of the vector can be obtained, providing a vector field which is defined between 0° and 360° degrees.

Finally, after the conversion of the orientation space, it is possible to calculate the angular difference between the vessels contained in the window and thus to obtain a measure of the bifurcation angle.

3 RESULTS

The performance of the proposed method has been evaluated on images belonging to DRIVE database (Staal et al., 2004). This database contains 40 retinal images of 565×584 pixels as well as their manual segmentation performed by experts. DRIVE is often used to evaluate segmentation algorithms designed specifically for the retinal vascular tree. In this paper, two methods for the computation of bifurcation angles have been compared: the proposed method based on the orientation vector field and the method described in (Morales et al., 2014).

Regarding the proposed method, it has been applied directly to the green component of the original RGB image. The directional openings were performed using an oriented linear structuring element of 7 pixels. This length comes from the trade-off between the curvature of the vessels and the angular resolution of the structuring element (it provides $\Delta\theta = 15^\circ$ and produces a filter bank with 12 branches). The low-pass filtering of the directional openings is performed using $\sigma=1$. The threshold th used to consider that a pixel belongs to a bifurcation or crossover is the

25% of the maximum intensity value. In Figure 5, the angles measured on two images of DRIVE database can be observed. Only a region of interest of these images has been shown for better visualization.

The parameters of the orientation estimation have been chosen to deal with this particular resolution. However, the orientation estimation method can be improved by considering a multiscale approach as described in (Angulo et al., 2011). There, the estimation of the orientation properties is provided by directional openings by line segments of variable length, which produce directional signatures for various scales.

With respect to the algorithm presented in (Morales et al., 2014), the main difference is that it only can be applied to binary images. Moreover, once the vessels have been segmented with this approach, the retinal vascular tree must be labelled in order to perform the angle measurements. The vascular tree labelling is focused on obtaining the vascular skeleton, detecting its bifurcation points through hit-or-miss transformations and a tracking process. Then, the angle formed by the daughter branches of each bifurcation point is calculated. The branches are fitted by straight lines using least-squares in a circular window centred on these points. As it was mentioned in Section 1, the main drawback of the methods based on the vascular skeleton is its excessive dependence between the skeleton pixels and the measured angle. Figure 6 shows the measured angles provided by the method described in (Morales et al., 2014) on different expert hand-made segmentations.

Comparing the results shown in Figure 6, it can be appreciated that the measured angles can be quite different, reaching a maximum angle variation on the same image of around 7% in the Figure 6a and around 6% in the Figure 6b. Note that the variation is due to the fact that the fitted line of the branches depends directly on the skeleton pixels considered, and the skeleton shape depends on the segmentation. Only the change in one pixel of the skeleton can modify the fitted line and therefore the calculated angle. The angles shown in the Figure 6a and 6b correspond with the existing bifurcations within the red rectangles of the Figure 5a and 5b respectively. Since the method proposed in this paper is based on the grey image and therefore, it avoids the segmentation and skeletonization stages, the provided measurements are much more accurate, stable and faithful to reality.

4 CONCLUSIONS

This paper has addressed a novel method to measure bifurcation angles in retinal images. The method is

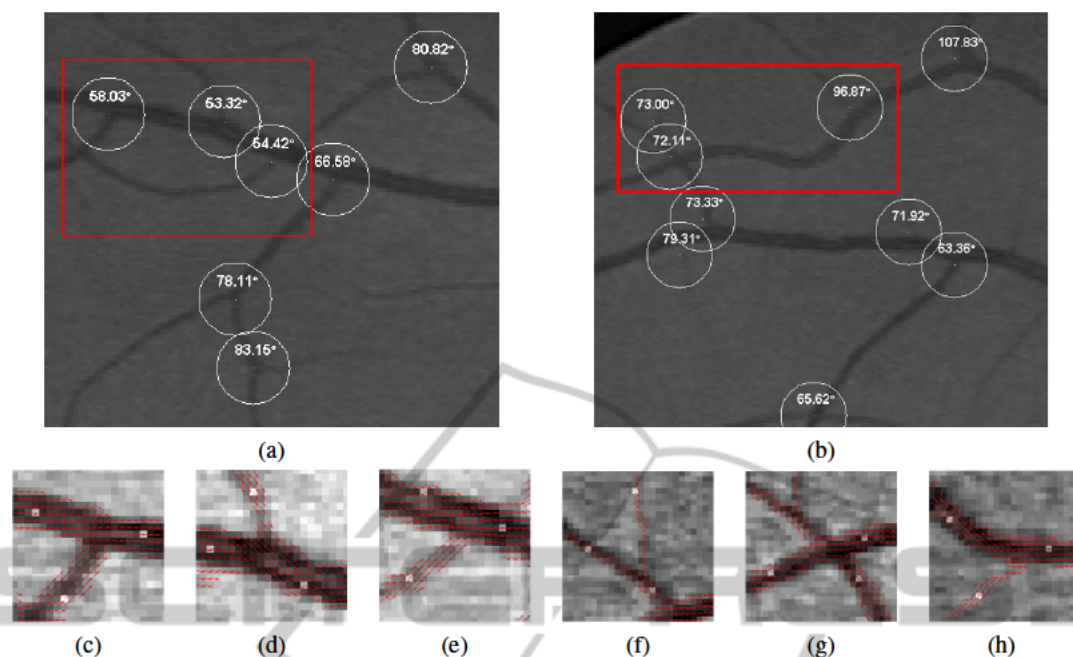


Figure 5: Angles of the bifurcations with the ASGVF orientation vector field on two images from DRIVE database. (a) A region of interest of the '19 test' image. (b) A region of interest of the '40 training' image. (c)-(e) Close up of selected bifurcations marked in red in (a). (f)-(h) Close up of selected bifurcations marked in red in (b). The bright pixels inside the vessels indicate at what points the value of the vector field has been taken.

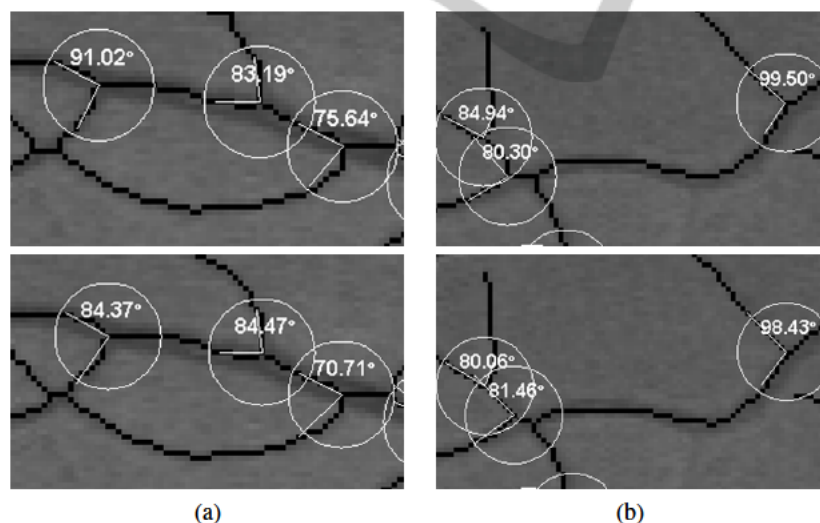


Figure 6: Bifurcation angles provided by the method described in (Morales et al., 2014) on the selected bifurcations of the Figure 5. This method is based on the skeletonization of a segmented (binary) image. (a) Skeletonization of two different expert segmentations of the '19 test' image. (b) Skeletonization of two different expert segmentations of the '40 training' image. Slight differences in the skeleton cause large differences in the measured angles.

based on a multiple orientation vector field which is obtained from gray images. The coexistence at some locations of two or more orientations provides the interest points where a bifurcation can exist, but also high curvature vessels are wrongly provided. After a classification stage, the false positives are reduced

and then the measurement is performed using the orientation estimation provided by the ASGVF of the gray image. Since the orientation method is based on the gradient of the gray image, no segmentation is required. The proposed method can measure accurately the bifurcation angles and it is more robust

than other methods which use the skeleton of the segmented image. The measurements based on the skeleton depends highly on this process. The change of a single pixel of the skeleton can modify the line which fits the branch and therefore it involves variations in the angle measurement.

As future work, we will evaluate the performance of the proposed method on all retinal images from DRIVE (Staal et al., 2004) and STARE (Hoover et al., 2000) databases. Comparisons with other state-of-art methods will also be done.

ACKNOWLEDGEMENTS

This work was supported by Ministerio de Economía y Competitividad of Spain, Project ACRIMA (TIN2013-46751-R).

REFERENCES

- Abramoff, M., Garvin, M., and Sonka, M. (2010). Retinal imaging and image analysis. *Biomedical Engineering, IEEE Reviews in*, 3:169–208.
- Angulo, J., Verdú-Monedero, R., and Morales-Sánchez, J. (2011). Multiscale local multiple orientation estimation using Mathematical Morphology and B-spline interpolation. *Proc. of 7th Int. Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA)*, pages 575 – 578.
- Ardizzone, E., Pirrone, R., Gambino, O., and Radosta, S. (2008). Blood vessels and feature points detection on retinal images. *Engineering in Medicine and Biology Society, 2008. EMBS 2008. 30th Annual International Conference of the IEEE*, pages 2246–2249.
- Azzopardi, G. and Petkov, N. (2011). Detection of retinal vascular bifurcations by trainable v4-like filters. *CAIP'11 Proc. 14th Int. Conf. on Computer Analysis of Images and Patterns*, 1:451–459.
- Azzopardi, G. and Petkov, N. (2013). Automatic detection of vascular bifurcations in segmented retinal images using trainable cosfire filters. In *Pattern Recognition Letters*, volume 34, pages 922–933.
- Chaudhuri, S., Chatterjee, S., Katz, N., Nelson, M., and Goldbaum, M. (1989). Detection of blood vessels in retinal images using two-dimensional matched filters. *IEEE Trans. on Medical Imaging*, 8:263–269.
- Gao, X. W., Bharath, A., Stanton, A., Hughes, A., Chapman, N., and Thom, S. (2000). Quantification and characterisation of arteries in retinal images. *Computer Methods and Programs in Biomedicine*, 63(2):133 – 146.
- Hoover, A., Kouznetsova, V., and Goldbaum, M. (2000). Locating blood vessels in retinal images by piecewise threshold probing of a matched filter response. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 19(3):203–210.
- Legaz-Aparicio, A. G., Verdú-Monedero, R., Morales-Sánchez, J., Larrey-Ruiz, J., and Angulo, J. (2014). Detection of retinal vessel bifurcations by means of multiple orientation estimation based on regularized morphological openings. In *XIII Mediterranean Conference on Medical and Biological Engineering and Computing 2013*, volume 41 of *IFMBE Proceedings*, pages 317–320. Springer International Publishing.
- MacGillivray, T., Perez-Rovira, A., Trucco, E., Chin, K., Giachetti, A., Lupascu, C., Tegolo, D., Wilson, P., Doney, R., Laude, A., and Dhillon, B. (2012). *VAM-PIRE: Vessel Assessment and Measurement Platform for Images of the Retina*. CRC Press.
- Martinez Perez, M., Highes, A., Stanton, A., Thorn, S., Chapman, N., Bharath, A., and Parker, K. (2002). Retinal vascular tree morphology: a semi-automatic quantification. *IEEE Trans. on Biomedical Engineering*, 49(8):912–917.
- Martínez-Pérez, M. E., Hughes, A., Stanton, A., Thom, S., Bharath, A., and Parker, K. (1999). Scale-space analysis for the characterisation of retinal blood vessels. *Medical Image Computing and Computer-Assisted Intervention*, pages 90–97.
- Morales, S., Naranjo, V., López-Mir, F., Navea, A., and niz, M. A. (2014). Computer-assisted system for hypertensive risk determination through fundus image processing. In Romero, L. M. R., editor, *XIII Mediterranean Conference on Medical and Biological Engineering and Computing 2013*, volume 41 of *IFMBE Proceedings*, pages 273–276. Springer.
- Soille, P. and Talbot, H. (2001). Directional morphological filtering. *IEEE Trans. on Pattern Analysis and Machine Intelligence*, 23(11):1313–1329.
- Staal, J., Abramoff, M., Niemeijer, M., Viergever, M., and van Ginneken, B. (2004). Ridge-based vessel segmentation in color images of the retina. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 23(4):501–509.
- Verdú-Monedero, R., Angulo, J., and Serra, J. (2011). Anisotropic morphological filters with spatially-variant structuring elements based on image-dependent gradient fields. *IEEE Trans. Image Processing*, 20(1):200–212.
- Zana, F. and Klein, J.-C. (2001). Segmentation of vessel-like patterns using mathematical morphology and curvature evaluation. *IEEE Trans. on Image Processing*, 10(7):1010–1019.

- Artículo 4: S. Morales, V. Naranjo, J. Angulo, A.G. Legaz-Aparicio, R. Verdú-Monedero, “Retinal network characterization through fundus image processing: significant point identification on vessel centerline”, Signal Processing: Image Communication, Vol. 59, pp. 50-64, November 2017. ISI-JCR(2017): 2.073, Posición 118 de 260 (T2, Q2), cat ENGINEERING, ELECTRICAL & ELEC-TRONIC.

Retinal network characterization through fundus image processing: significant point identification on vessel centerline

S. Morales^{a,b,*}, V. Naranjo^{a,b}, J. Angulo^c, A.G. Legaz-Aparicio^d, R. Verdú-Monedero^d

^a*Instituto de Investigación e Innovación en Bioingeniería, I3B, Universitat Politècnica de València, Camino de Vera s/n, 46022, Valencia, Spain*

^b*Grupo Tecnologías de Informática Aplicadas a la Oftalmología, Unidad Conjunta UPV-FISABIO, Spain*

^c*MINES ParisTech, PSL-Research University, CMM-Centre de Morphologie Mathématique, France*

^d*Universidad Politécnica de Cartagena, Cartagena, Spain*

Abstract

This paper describes a new approach for significant point identification on vessel centerline. Significant points such as bifurcations and crossovers are able to define and characterize the retinal vascular network. In particular, hit-or-miss transformation is used to detect terminal, bifurcation and simple crossing points but a post-processing stage is needed to identify complex intersections. This stage focuses on the idea that the intersection of two vessels creates a sort of close loop formed by the vessels and this effect can be used to differentiate a bifurcation from a crossover. Experimental results show quantitative improvements by increasing the number of true positives and reducing the false positives and negatives in the significant point detection when the proposed method is compared with another state-of-the-art work. A sensitivity equal to 1 and a predictive positive value of 0.908 was achieved in the analyzed cases. Hit-or-miss transformation must be applied on a binary skeleton image. Therefore, a method to extract the vessel skeleton in a direct way is also proposed. Although the identification of the significant points of the retinal tree can be

*Corresponding author

Email addresses: sanmomar@i3b.upv.es (S. Morales), vnaranjo@i3b.upv.com (V. Naranjo)

useful by itself for multiple applications such as biometrics and image registration, this paper presents an algorithm that makes use of the significant points to measure the bifurcation angles of the retinal network which can be related to cardiovascular risk determination.

Keywords: Retinal skeleton; vessel centerline; significant points; bifurcations; crossings; bifurcation angles.

1. Introduction

Retinal structure characterization is a fundamental component of most automatic retinal disease screening systems [1]. It is usually a prerequisite previous to carrying out more complex tasks as identifying different pathologies. In general, anatomical structures are segmented through fundus image processing and then certain features are extracted from them to characterize each pathology. One of the most important anatomical structures of the fundus is the vascular network that corresponds to the retinal blood vessels. Morphological attributes of retinal blood vessels, such as length, width, tortuosity and/or branching pattern and angles can be used for diagnosis, screening, treatment, and evaluation of various cardiovascular and ophthalmologic diseases [2].

In the vessel centerline there are three types of significant points: terminal, bifurcation and crossing. The detection of significant points in the retinal vascular tree increases the information about the vascular structure allowing its use for medical diagnosis. In particular, the identification of the vascular bifurcations and crossovers on the vascular network is helpful for predicting cardiovascular diseases and can also be used as biometric features or for image registration [3].

This paper focuses on the identification of the significant points as a means of defining and characterizing the retinal vascular network. In general, the significant points of the vascular network are detected on vessel centerline, also called vessel skeleton. The centerline can be obtained after a skeletonization process of the vessels previously segmented or through some method by which

the skeleton is directly obtained. The main disadvantage of the first approach is that an inaccurate vessel segmentation may result in errors in the skeletonization. Motivated by that reason, this paper describes an approach to determine the retinal skeleton in a direct way through stochastic watershed transformation. Then, a new method to distinguish the different types of significant points on the retinal skeleton is presented. Finally, the proposed method is used as a necessary step before measuring bifurcation angles through the orientation vectors of each branch of the vascular tree.

In the literature there exist different attempts for significant point detection. Some of them are only based on bifurcation location [4] or on detecting bifurcations and the most simple intersections [5]. Other works take into consideration more types of crossovers since it is the most challenging part and try to distinguish between them and bifurcations. The most common approach is to center a fixed-size circular window on all bifurcations and check the number of intersections between the vessel centerline and the circular window [6, 7]. However, it causes that the large vessel crossovers are detected as two bifurcation points. Bhuiyan *et al.* addressed this problem by considering the width of the junction [3] and Calvo *et al.* by combining local and topological information [8].

Referring to vessel extraction techniques, they can be mainly divided into four categories: edge detectors, matched filters, pattern recognition techniques and morphological approaches. A more extensive classification can be found in [1]. Most edge detection algorithms assess changes between pixels values by calculating the image gradient magnitude and then it is thresholded to create a binary edge image [9, 10]. Matched filters are filters rotated in different directions in order to identify the cross section of blood vessels [11, 12]. Pattern recognition techniques can be divided into supervised and unsupervised approaches. Supervised methods, such as artificial neural networks [13] or support vector machines [14, 15], exploit some prior labelling information to decide whether a pixel belongs to a vessel or not, while unsupervised algorithms perform the vessel segmentation without any prior labelling knowledge [16]. Morphological processing is based on vessels characteristics known a priori (line connected

segments) and combines morphological operators to achieve the segmentation [17, 18, 19]. Although most of the state-of-the-art methods look for detecting all vessel pixels of the vascular tree, there are also some attempts based on finding the vessel skeleton, e.g., those based on shortest path connection [20], on matched filters [21], on ridge descriptors [22] or on the application of the classical marker-controlled watershed [23, 24], which differs to the stochastic watershed that is applied in this work.

The main contribution of this paper is the presentation of a complete methodology for significant point detection of the retinal vascular tree from a fundus image. It includes the vessel centerline extraction and the differentiation between bifurcations and complex crossings, which is a challenging and key process for a correct vessel tracking. In addition, despite the lack of public databases with manual-detected points to be used as ground truth, quantitative quality parameters were calculated.

The rest of the paper is organized as follows: Section 2 describes materials and methods. Section 3 presents an approach for vessel centerline extraction in retinal images. Section 4 addresses the algorithm to detect significant points on the vessel centerline. That algorithm is used to select the bifurcation points existing in the image and measure the bifurcation angles as explained in Section 5. Section 6 shows the results of the methods presented in Sections 3, 4 and 5. Finally, Section 7 closes the paper with conclusions and future lines of work.

2. Materials and Methods

2.1. Material

In this work, three different public databases were used: DRIVE [25], STARE [11] and VARIA [26]. DRIVE and STARE databases were used in the validation of the method for vessel centerline detection and all of them in the validation of significant point identification.

DRIVE database is composed of 40 retinal images (565 x 584 pixels) belonging to diabetic subjects. For each image, a mask image that delineates the field

of view is provided as well as manual segmentations of the blood vessels. STARE database is a set of 20 images (700 x 605 pixels) along with two hand-labelled vessel network provided by different experts. VARIA contains 233 images, from 139 different individuals, with a resolution of 768 x 584 pixels.

2.2. Morphological operators

Mathematical morphology is a non-linear image processing methodology based on minimum and maximum operations, which can be used to extract relevant structures of an image f [27]. This is achieved by probing the image with another known shape B called structuring element (SE). The result of the single operation also depends on the choice of B . The two basic morphological operators are: *dilation*, $\delta_B(f)$, and *erosion*, $\varepsilon_B(f)$. Their purpose is to expand light or dark regions, respectively, according to the size and shape of the SE. Those elementary operations can be combined to obtain a set of basic filters: *opening*, $\gamma_B(f)$, and *closing*, $\varphi_B(f)$. Light or dark structures are respectively filtered out from the image by these operators regarding the SE chosen.

The method proposed in this paper for vessel centerline detection applies these basic filters directly, or uses them to derive more complex operators, such as:

- *Dual top-hat transformation*, $\rho_B(f) = \varphi_B(f) - f$, is used to extract contrasted dark components with respect to the background.
- *Close-hole operator* fills all holes in an image f that do not touch a boundary image. For a grey-scale image, it is considered a hole any set of connected points surrounded by connected components of value strictly greater than the hole values. This operator is defined as $\psi^{ch}(f) = [\gamma^{rec}(f^c, f_\partial)]^c$, where $\gamma^{rec}(g, f)$ is the *reconstruction by dilation* of an image f (marker) which is contained within an image g (reference), f^c is the complement image (i.e., the negative) and f_∂ the image boundary.
- *Reconstruction by dilation*, $\gamma^{rec}(g, f) = \delta_g^{(i)}(f)$, is the successive geodesic dilation of f regarding g up to idempotence, so that $\delta_g^{(i)}(f)$ represents the

geodesic dilation and $\delta_g^{(i)}(f) = \delta_g^{(i+1)}(f)$. The *geodesic dilation*, $\delta_g^{(i)}(f) = \delta_g^{(1)}\delta_g^{(i-1)}(f)$, is the iterative unitary dilation of f regarding g , being $\delta_g^{(1)}(f) = \delta_B(f) \wedge g$.

2.3. Stochastic watershed transformation

Watershed transformation is a segmentation technique for gray-scale images [28]. This algorithm is a powerful segmentation tool whenever the minima of the image represent the objects of interest and the maxima are the separation boundaries between objects. Due to this fact, the input image of this method is usually a gradient image $\varrho(f)$. However, one problem of this technique is the over-segmentation, which is caused by the existence of numerous local minima in the image normally due to the presence of noise. One solution to this problem is using marker-controlled watershed, $WS(\varrho)_{f_{mrk}}$, in which the markers f_{mrk} artificially impose the minima of the input image. Nevertheless the controversial issue consists in determining f_{mrk} for each region of interest. Note that the use of a limited number of markers along with the complex morphology of the retinal vascular network can also cause that some parts of it are not detected (sub-segmentation). Therefore, the choice of the correct markers is crucial for the effectiveness and robustness of the algorithm.

The stochastic watershed is used to solve the sub-segmentation conflict [29]. In this transformation, a given number M of marker-controlled-watershed realizations are performed selecting N random markers to estimate a probability density function (*pdf*) of image contours and filter out non significant fluctuations. The results of the different realizations are averaged by Parzen window method [30]. Obtaining a *pdf* of the contours of the watershed regions facilitates the final segmentation, providing robustness and reliability since the arbitrariness in choosing the markers is avoided. Afterwards, it is necessary to perform a last marker-controlled watershed on the *pdf* obtained to obtain a final result. This type of watershed works better than other marker-based watershed transformations used previously in the literature.

2.4. Hit-or-miss transformation

Hit-or-miss transformation (HMT) is a morphological operator used for detecting specific patterns in a binary image [31]. Therefore, it can be applied to detect the significant points on a skeleton image. This is achieved by probing the image with a specific set of known shape (structuring element or SE). The structuring element employed in this operation is called composite structuring element since it contains two basic SE. The first one, denoted by B_{FG} , defines the set of pixels that should match the foreground (positive pixel values) while the second one, denoted by B_{BG} , defines the set of pixels that should match the background (zero pixel values). By definition, B_{FG} and B_{BG} share the same origin and are disjoint sets, i.e., $B_{FG} \cap B_{BG} = 0$. Depending on whether the origin belongs to B_{FG} or B_{BG} the HMT extracts foreground or background pixels [27]. Figure 1 depicts a composite structuring element $\mathbf{B} = (B_{FG}, B_{BG})$ where B_{FG} is denoted by 1's, B_{BG} by 0's and the rest of values are ignored. In this example, the HMT would detect the pixels with a neighbor on the left but that up, down and to the right did not have any. The value of the left diagonals does not matter, it could be 0 or 1.

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad = \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 \\ \hline \end{array} \quad + \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ \hline \end{array}$$

\mathbf{B}
 B_{FG}
 B_{BG}

Figure 1: Example of a composite structuring element.

The HMT of a set X by a composite structuring element $\mathbf{B} = (B_{FG}, B_{BG})$ can be written in terms of an intersection of two morphological erosions [27]:

$$HTM_{\mathbf{B}}(X) = \varepsilon_{B_{FG}}(X) \cap \varepsilon_{B_{BG}}(X^c), \quad (1)$$

where X^c is the complement set of X (i.e., the negative).

3. Skeleton extraction

In general, the detection of retinal vascular network is necessary before analyzing vessel features. The most common approach in the literature is a first stage of vessel segmentation, then the skeletonization of the detected vessels and finally the analysis of different features on the vascular skeleton such as vessel calibers, significant points or bifurcation angles. The major drawback of this approach is the dependence of the different stages on the previous ones in addition to an increase of computational cost. Based on these facts, this section is focused on obtaining the retinal skeleton in a direct way avoiding the segmentation stage. Its goal is to reduce the number of necessary steps in the processing of the fundus image. As a consequence, this would also reduce the dependency of previous stages. Specifically, the method proposed for this purpose is mainly based on mathematical morphology along with curvature evaluation. Two main steps are involved: in the first step, the principal curvature is calculated on the retinal image. In the second step, the stochastic watershed transformation is applied to extract the vascular skeleton. The main stages are included in the flowchart shown in Figure 2.

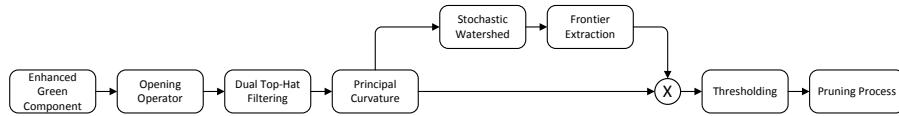


Figure 2: Flowchart for skeleton extraction.

Although fundus images are RGB format, the present work is drawn on monochrome images obtained from the green component extraction because this band provides improved visibility of the blood vessels. Moreover, this image is enhanced such that 1% of data is saturated at low and high intensities (Figure 3(a)). Then, a small opening, using a disc of radius 1 as SE (B_1) , is performed on the enhanced green component image to fill in any gaps in vessels that could provoke subsequent errors, for example due to brighter zones within

arteries. Next, a dual top-hat, with a SE larger than the widest vessel (B_2), is applied with the goal of extracting all of them and eliminating structures with high gradient that are not vessels, as occurs in the optic disc (Figure 3(b)). Afterwards, with the aim of highlighting the vessels on the background, principal curvature is calculated as the maximum eigenvalue of the Hessian matrix H [9]:

$$H = \begin{pmatrix} \partial_{xx}f & \partial_{xy}f \\ \partial_{yx}f & \partial_{yy}f \end{pmatrix}, \quad (2)$$

where $\partial_{ij}f$ represents the second directional derivatives of an image $f(x, y)$. The Hessian matrix is calculated at different scales ($s = \{0, 2, 8, 14\}$) by convolving the original image $f(x, y)$ with a Gaussian kernel G of variance s^2 ,

$$f_s(x, y; s) = f(x, y) * G(x, y; s) = f(x, y) * \frac{1}{2\pi s^2} e^{-\frac{x^2+y^2}{2s^2}}. \quad (3)$$

The resulting image is shown in Figure 3(c).

If the principal curvature is directly calculated on the enhanced image, all structures with high curvature are highlighted, not only the vessels. The optic disk border has also high curvature but it should not be detected. This is a typical problem that occurs in most edge detection methods for vessel segmentation that it is avoided with the previous dual top-hat filtering.

Then, the principal curvature f_κ is obtained by normalizing each λ_{max} by $2s$ and computing the local maxima over scales:

$$f_\kappa = \max_s \left(\frac{\lambda_{max}(s)}{2s} \right). \quad (4)$$

Finally, stochastic watershed is applied to the curvature image. As explained above, this transformation uses random markers to build a probability density function (*pdf*) of contours (Figure 3(d)). In particular, 10 marker-controlled-watershed realizations were performed selecting 300 random markers in each realization. Then, *pdf* is segmented by a last marker-controlled watershed. The vascular skeleton is part of the frontiers of the resultant regions as can be observed in Figure 3(e).

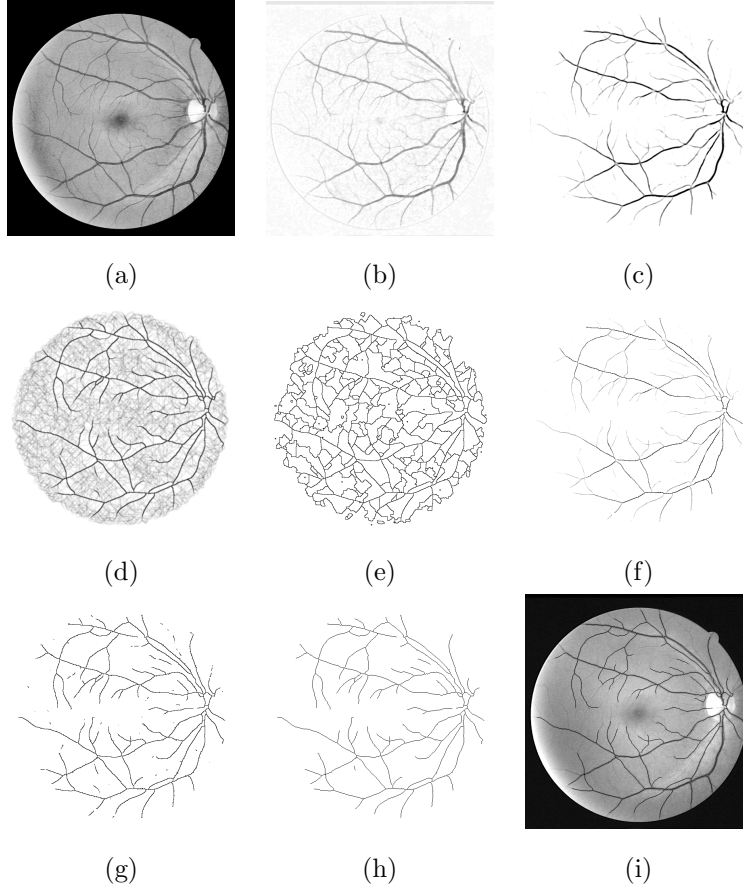


Figure 3: Skeleton extraction process: (a) Enhanced green component obtained from the original fundus image, (b) Dual top-hat filtering, (c) Principal curvature, (d) Probability density function (pdf) of contours obtained with 10 simulations and 300 random markers, (e) Watershed frontiers, (f) Product between the principal curvature and the watershed frontiers, (g) Thresholding ($t = 0.05$), (h) Pruning and (i) Final result. The images (b)-(h) have been inverted for better visualization.

In that case, both for *pdf* computing and for last marker-controlled watershed, random markers are combined with some controlled markers. This is due to the morphology of the vascular network which contains many of vessel crossings. In addition to the random markers, it is forced that there is one marker at least in the area delimited by the crossing of two vessels (controlled markers),

so that the final markers are directly the union of both (random and controlled markers). This methodology avoids that the vessels close to some crossing are not detected by the watershed transformation. The crossing areas are determined by means of the residue of the close-hole operator on f_κ and then one or more markers are chosen randomly within these areas giving place to the controlled markers. This problem is illustrated in Figure 4, where only a region of interest is shown for better visualization.

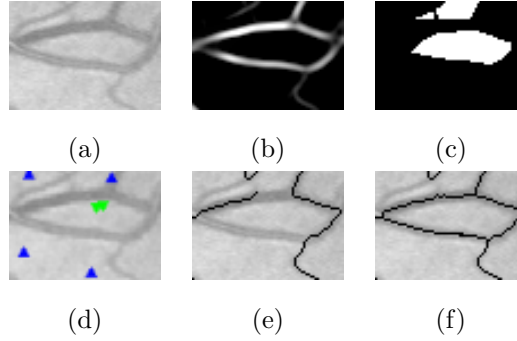


Figure 4: Stochastic watershed on the crossing of two vessels: (a) Enhanced green component, (b) Principal curvature (f_κ), (c) Residue of close-hole operator, (d) Random (blue \blacktriangle) and two controlled (green \blacktriangledown) markers, (e) Result of the stochastic watershed using only the random markers shown in blue and (f) Result of the stochastic watershed combining random and controlled markers (blue and green).

In order to discriminate which frontiers are significant and which ones are not and should be filtered out, the frontiers are multiplied by f_κ (Figure 3(f)) and then are thresholded (Figure 3(g)) using a fixed threshold, experimentally $t = 0.05$. Once the skeleton is obtained, a pruning process is applied to remove possible spurs giving rise to the final result of the presented method (Figure 3(h) and 3(i)).

The implemented pruning process is characterized by removing spur branches but without altering the main branches. Only the branches whose size is less than a threshold ($n_{max} = 10$) are removed while the other are kept intact [32]. n_{max} value must be fixed based on image resolution. The pruning method is

based on defining a function $\Upsilon(S)$ which assigns to each point of the skeleton S the number n of unitary erosions needed to remove it from S . The value of the function $\Upsilon(S)$ is $n_{max} + 1$ for the points $\mathbf{x} \in S$ which are not removed after n_{max} unitary erosions. Then, making use of the function $\Upsilon(S)$, it is possible to differentiate between the secondary and the main skeleton branches. A branch is considered as secondary if $\Upsilon(S(\mathbf{x}_1)) - \Upsilon(S(\mathbf{x}_2)) > 1$, being \mathbf{x}_1 and \mathbf{x}_2 two adjacent points of the skeleton branch. Afterwards, the secondary branches are disconnected from the main branches and a reconstruction by dilation is applied using this image, i.e. the skeleton with the secondary branches disconnected, as reference and being the marker image that defined by Equation 5.

$$mrk = \begin{cases} 1 & \text{if } \Upsilon(S(\mathbf{x})) = n_{max} + 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad (5)$$

This operation manages to reconstruct the original skeleton but without spur branches. Figure 5 shows an example of the main pruning steps and the difference between the proposed pruning and the conventional.

Algorithm 1 summarizes the steps of the vessel centerline extraction method and Algorithm 2 the steps of the pruning process.

4. Significant point determination

As mentioned before, in the vascular skeleton there are three types of significant points: terminal, bifurcation and crossing points. All of them must be detected due to their interest to characterize the relations between the different branches of the skeleton, i.e., relations between the parent and daughter branches.

4.1. Terminal and bifurcation points

The hit-or-miss transformation (HMT) can be directly applied to the vascular skeleton to locate terminal and bifurcation points using the different SE shown in Figure 6 and Figure 7. It must be remembered that B_{FG} is denoted by 1's and B_{BG} by 0's. Note that these SE must be used in all their orientations,

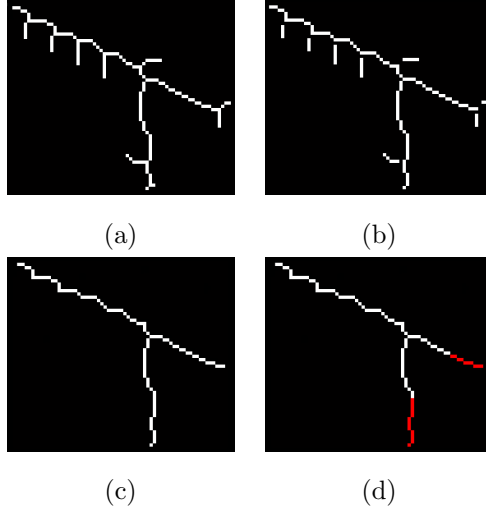


Figure 5: Pruning process: (a) Original skeleton, (b) Skeleton with the secondary branches disconnected, (c) Pruned skeleton by the proposed method and (d) Result of the conventional pruning (marked in red the pixels that are removed by the conventional pruning and are remained by the proposed pruning process). It can be observed that the main advantage of the proposed pruning is that only the spur branches are removed while the rest are kept intact. The conventional pruning removes a specific number of pixels for every branch (without taking into account its relevance).

one each 90° , so four hit-or-miss iterations are required for each SE, i.e., a total of 8 and 16 SEs are used to detect terminal and bifurcation points, respectively.

	0	0
1	1	0
	0	0
\mathbf{B}_{1_1}		

1	0	0
0	1	0
0	0	0
\mathbf{B}_{1_2}		

Figure 6: Structuring elements used for detecting terminal points.

The choice of the SE shape is related to the topology of the point in question. For example, on the one hand, any terminal point will have only one neighbor and it will be rounded by background pixels and, on the other hand, a bifurcation point will have three neighbors located in particular positions. This can be appreciated clearly if the SE defined in Figure 7 are observed.

Algorithm 1: Vessel centerline extraction

Data: Original RGB fundus image $\mathbf{f} = (f_R, f_G, f_B)$, Scale vector

$\mathbf{s} = [0, 2, 8, 14]$, Gaussian kernel G

Result: Vessel centerline, f_{out}

initialization: $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ (as main text) ;

$f_{in} \leftarrow f_G$ Green component selection ;

$f_{enh} \leftarrow \Gamma(f_{in})$ Image Enhancement ;

$f_{op} \leftarrow \gamma_{B_1}(f_{enh})$ Opening ;

$f_{dth} \leftarrow \rho_{B_2}(f_{op})$ Dual top-hat ;

Principal curvature:

for $i \leftarrow 1$ **to** $length(\mathbf{s})$ **do**

$f_{s_i} \leftarrow f_{dth} \otimes G(s_i)$;

$H_{s_i} \leftarrow H(f_{s_i})$;

$\lambda_{max_{s_i}} \leftarrow \max\{eig(H_{s_i})\}$;

$\lambda'_{max_{s_i}} \leftarrow \frac{\lambda_{max_{s_i}}}{2s_i}$;

end

$f_{\kappa} \leftarrow \max_{\mathbf{s}} (\lambda'_{max_{\mathbf{s}}})$;

$f_{ws} \leftarrow WS(f_{\kappa})_{f_{mrk}}$ Stochastic Watershed with random and controlled markers ;

$f_{th} \leftarrow (f_{\kappa} \times f_{ws}) < t$ Thresholding ;

$f_{out} \leftarrow \Upsilon(f_{th})$ Pruning ;

Retinal skeleton is an one-pixel-thick structure fully 8-connected. However, when the significant points belonging to the skeleton are being looked for, it is wanted to avoid the multiple paths that are inherent in this type of connectivity. Therefore, before point detection, it is necessary to convert the skeleton from 8-connectivity to m -connectivity so that the multiple paths are removed [31].

A pixel p has four horizontal and vertical neighbors $N_4(p)$ and four diagonal neighbors $N_D(p)$. All these neighbors are called the 8-neighbors of p , denoted

Algorithm 2: Pruning process

Data: Image of the retinal skeleton with spur branches S

Result: Pruned skeleton S'

initialization: $n_{max} = 10$ (Size of the branches to be removed), B
(Unitary structuring element), N_8 (8-neighborhood) ;

```
for  $\mathbf{x} \leftarrow 1$  to  $length(S)$  do
    if  $(\mathbf{x} \in \varepsilon_B^{(n-1)}(S(\mathbf{x})) \ \& \ (\mathbf{x} \notin \varepsilon_B^{(n)}(S(\mathbf{x})))$  with  $n \leq n_{max}$  then
         $\Upsilon(\mathbf{x}) = n$ ;
    else if  $(\mathbf{x} \in \varepsilon_B^{(n_{max})}(S(\mathbf{x})))$  then  $\Upsilon(\mathbf{x}) = n_{max} + 1$  ;
    else if  $(\mathbf{x} \notin (S(\mathbf{x})))$  then  $\Upsilon(\mathbf{x}) = 0$  ;
end

 $R = S$  Reference image ;

for  $\mathbf{x} \leftarrow 1$  to  $length(S)$  do
    if  $\Upsilon(\mathbf{x}) - \Upsilon(N_8(\mathbf{x})_{N_8 \exists S}) > 1$  then  $R(\mathbf{x}) = 0$  Disconnection of
        secondary branches ;
    if  $\Upsilon(\mathbf{x}) == (n_{max} + 1)$  then  $mrk(\mathbf{x}) = 1$  Marker image ;
    else  $mrk(\mathbf{x}) = 0$ ;
end

 $S' = \gamma^{rec}(R, mrk)$  Reconstruction by dilation ;
```

by $N_8(p)$. Two binary pixels p and q are 8-connected if q is in the set $N_8(p)$ but they are m-connected if

1. q is in $N_4(p)$, or
2. q is in $N_D(p)$ and $N_4(p) \cap N_4(q) = 0$.

The difference between 8-connectivity and m -connectivity can be appreciated in Figure 8. This conversion is necessary because the central pixel involves that there is not only a possible path in the skeleton therefore the detection of significant points and any tracking process performed later could be erroneous.

In the case of the 8-connectivity, the multiple paths are manifested in four

	1	
1	1	
	1	
B₂₁		

1		
0	1	
1	0	1
B₂₂		

	1	
	1	
1	0	1
B₂₃		

	1	
1	1	
		1
B₂₄		

Figure 7: Structuring elements used for detecting bifurcation points.

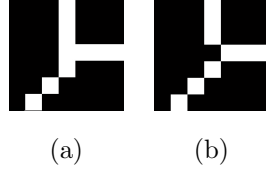


Figure 8: 8-connectivity to m -connectivity conversion (a) 8-connected skeleton and (b) m -connected skeleton.

basic patterns which are shown in Figure 9. It can be observed that the case shown in Figure 8 corresponds to the patterns **B₃₂** and **B₃₃**.

0	1	
1	1	
		0
B₃₁		

	1	0
	1	1
0		
B₃₂		

0		
	1	1
	1	0
B₃₃		

		0
1	1	
0	1	
B₃₄		

Figure 9: Structuring elements used to convert an 8-connected skeleton to m -connectivity.

The HMT allows to detect all these patterns. Then, the central pixels must be changed to 0 for eliminating the multiple paths. The conversion from 8 to m -connectivity can be performed through a basic sequence of morphological steps:

$$\begin{aligned}
\Theta_1(X, \mathbf{B}_{31}) &= X - HMT_{\mathbf{B}_{31}}(X) = X \cap [HMT_{\mathbf{B}_{31}}(X)]^c \\
\Theta_2(\Theta_1, \mathbf{B}_{32}) &= \Theta_1 - HMT_{\mathbf{B}_{32}}(Y_1) = Y_1 \cap [HMT_{\mathbf{B}_{32}}(Y_1)]^c \\
\Theta_3(\Theta_2, \mathbf{B}_{33}) &= \Theta_2 - HMT_{\mathbf{B}_{33}}(Y_2) = Y_2 \cap [HMT_{\mathbf{B}_{33}}(Y_2)]^c \\
\Theta_4(\Theta_3, \mathbf{B}_{34}) &= \Theta_3 - HMT_{\mathbf{B}_{34}}(Y_3) = Y_3 \cap [HMT_{\mathbf{B}_{34}}(Y_3)]^c \\
\Theta(X, \mathbf{B}_3) &= \Theta_4,
\end{aligned} \tag{6}$$

where X is the input image that contains the 8-connected skeleton and Θ the

output image with the corresponding skeleton with m -connectivity.

4.2. Crossing points

Due to the fact that the intersections between different branches of the vascular tree are formed, usually, by a set of pixels, most crossing points cannot be detected by pattern recognition on the skeleton, i.e., through the hit-or-miss transformation. It can only be applied in simple crossing point detection using the SE shown in Figure 10.

0	1	0
1	1	1
0	1	0

\mathbf{B}_{4_1}

1	0	1
0	1	0
1	0	1

\mathbf{B}_{4_2}

Figure 10: Structuring elements used for detecting simple crossing points.

However, practically most crossing points, if not all, are not simple, or in other words, the branches do not intersect in only one pixel and several points can belong to the same intersection. This provokes that the extremes of the intersection are considered as bifurcation because both of them have three neighbors and accomplishes some of the characteristic patterns of the bifurcation points. Figure 11 represents the different types of crossing points. The light gray branch intersects with other two branches, drawn in dark gray, giving rise to a simple (X) and a complex (O) crossing point marked in black.

Most works of the state-of-the-art consider that the vessel crossing points are two bifurcation points very close to each other. So, a fixed-size circular window is centered on the candidate bifurcations and if there exist four intersections between the window and the skeleton, the point is marked as a crossing. The problem of this approach is that the crossing point detection depends on a large degree on the window size. If the size is too small, the crossings are not detected and if the size is too big other vessels not belonging to this crossing can intersect with the window. Moreover, it must be taken into account that the size of the intersections varies from one case to another and it is also dependent on the image resolution.

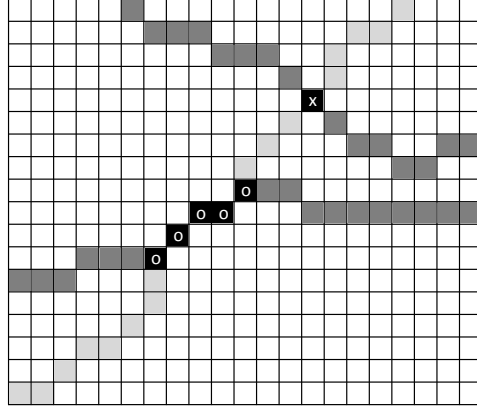


Figure 11: Different types of crossing points: simple (X) and complex (O).

Retinal vessels have their origin in the optic disk head. From this center, the vessels bifurcate and constitute the retinal vascular tree. It is common that arteries and veins intersect in some occasion and generate the crossing points under consideration (Figure 12(a)). This means that when they intersect, as the vessels have a common origin, generate a sort of close loop which will be useful to differentiate if one point is a crossing point or not (Figure 12(b)). Based on this idea, a new algorithm is proposed to analyze all points detected initially as a bifurcation in order to discriminate those that are really crossing points.

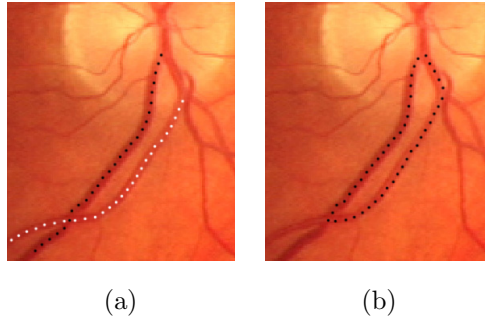


Figure 12: Vessel intersection: (a) Intersection between two vessels and (b) Close loop formed by an intersection.

First, a bifurcation point is considered as candidate to be a crossing point if when a circular window is centered on this point, there are four or more intersections between the skeleton and this window (W). The window radius is three times the average diameter of the vessels. This size is established empirically. Then, if the candidate point is part of a close loop generated by the skeleton branches, the closest candidate to crossing point is looked for, and if it is directly connected with the previous point and is not part of the same loop, both of them are established as crossing points. Figure 13 represents this process. Terminal and bifurcation points detected by the HMT are marked in red and green, respectively (Figure 13(a)). In Figure 13(b) the candidates to crossing points are highlighted in yellow. The close loops that contain some candidate point are drawn in Figure 13(c). Figure 13(d) shows the final result with the crossing points detected in white. Note that the two points identified in green at the bottom left of the Figure 13(d) are not crossing points but bifurcations because they do not accomplish the condition of belonging to a different loop. Both of them belong to the close loop marked in orange in Figure 13(c). To be considered as crossing, two candidates should be connected and belong to a different loop.

With this type of analysis, the more common intersection extremes are completely identified. In addition, it should be taken into account that the pixels between these points are also part of the same intersection.

Algorithm 3 summarizes the complete process of the detection of the significant points on the retinal vascular skeleton. $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4$ are the composite structuring elements defined in Figures 6, 7, 9 and 10.

5. Use of the significant points: Measurement of bifurcation angles

The significant points of the retinal vascular tree can be used as biometric features, landmarks for registration or keypoints in tracking processes and branching patterns. In particular, this section presents an algorithm that makes use of the significant points detected as detailed in Section 4 to measure the bi-

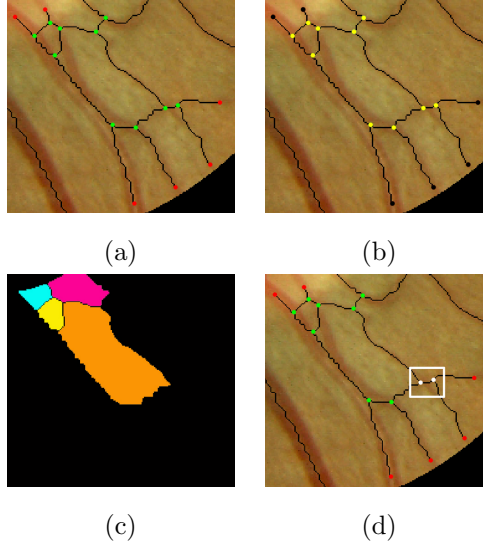


Figure 13: Automatic detection of common intersections: (a) Significant points detected by means of HMT (terminal points in red and bifurcation points in green), (b) Crossing point candidates, (c) Close loops formed by branches that contain some candidate point and (d) Crossing points automatically detected (white).

furcation angles.

The algorithm proposed to carry out this measurement is based on the estimation of the main orientations of the image gradient at each bifurcation point previously detected. The estimation of the multiple main orientations is performed as the flowchart depicted in Figure 14. This approach differs from [33], where the multiple main orientations are estimated by analysing a block of the image, whereas in this method the multiple orientations are estimated at each pixel.

Let $f(\mathbf{x}) : E \rightarrow \mathbb{R}$ be a gray-level image, where the support space is $E \subset \mathbb{Z}^2$ and the pixel coordinates are $\mathbf{x} = (x, y)$. Let us define $g(\mathbf{x})$ as the absolute value of the gradient of $f(\mathbf{x})$, i.e.,

$$g(\mathbf{x}) = \|\nabla f(\mathbf{x})\| = \sqrt{\left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\right)^2}. \quad (7)$$

The directional opening of $g(\mathbf{x})$ by a linear (symmetric) structuring element

Algorithm 3: Significant point detection

Data: Image of the retinal skeleton f , Circular window W

Result: Binary image of the terminal points f_{TP} , Binary image of the bifurcation points f_{BP} , Binary image of the crossing points f_{CP}

initialization: $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2, \mathbf{B}_3, \mathbf{B}_4$ (as main text) ;

$f_m \leftarrow \Theta_{\mathbf{B}_3}(f)$ m -connectivity conversion ;

$f_{TP} \leftarrow HMT_{\mathbf{B}_1}(f_m)$ terminal point detection ;

$f_{BP} \leftarrow HMT_{\mathbf{B}_2}(f_m)$ bifurcation point detection ;

$f_{CP_1} \leftarrow HMT_{\mathbf{B}_4}(f_m)$ simple crossing point detection ;

complex crossing point detection:

```
for  $i \leftarrow 1$  to  $\sum(f_{BP})$  do
    if  $\sum(W_{BP_i} * f_m) \geq 4$  then
        if  $f_{BP_i} \in \text{close loop}$  then
             $f_{BP_j} \leftarrow \text{argmin}(\text{dist}(f_{BP_i}, f_{BP}))$  ;
            if ( $f_{BP_i}$  is connected with  $f_{BP_j}$ ) & ( $\text{loop}(f_{BP_i}) \neq \text{loop}(f_{BP_j})$ )
                then
                     $f_{CP_{2_i}} = f_{BP_i} + f_{BP_j}$  ;
                end
            end
        end
    end
end
```

$f_{CP} = f_{CP_1} + f_{CP_2}$ crossing point detection ;

(SE) of length l and direction θ is defined as the directional erosion of g by $L^{\theta,l}$ followed by the directional dilation with the same SE [34]:

$$\gamma_{L^{\theta,l}}(g)(\mathbf{x}) = \delta_{L^{\theta,l}} [\varepsilon_{L^{\theta,l}}(g)](\mathbf{x}), \quad (8)$$

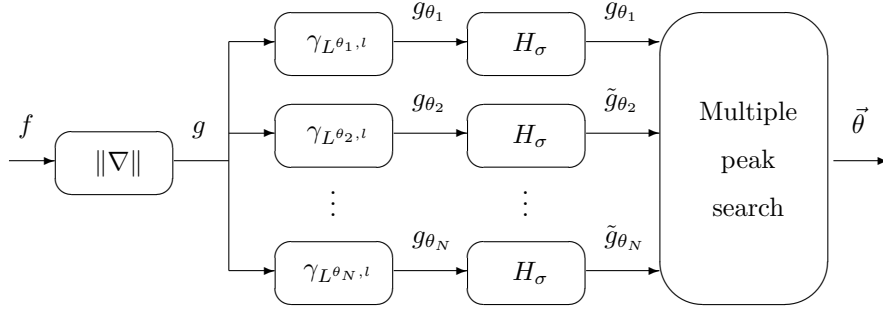


Figure 14: Flowchart of the multiple orientation estimation method.

where the directional erosion and dilation are respectively

$$\varepsilon_{L^{\theta, l}}(f)(\mathbf{x}) = \bigwedge_{\mathbf{h} \in L^{\theta, l}(\mathbf{x})} \{f(\mathbf{x} + \mathbf{h})\}, \quad (9)$$

$$\delta_{L^{\theta, l}}(f)(\mathbf{x}) = \bigvee_{\mathbf{h} \in L^{\theta, l}(\mathbf{x})} \{f(\mathbf{x} - \mathbf{h})\}. \quad (10)$$

The proposed orientation model is based on a decomposition of the gradient information by families of linear openings, $\{\gamma_{L^{\theta_i, l}}\}_{i \in I}$, according to a particular discretization of the orientation space $\{\theta_i\}_{i \in I}$.

In the next step of the proposed method, a filtering is performed at each one of the directional openings (depicted as H_σ in Figure 14). The filtering diffuses the orientation information and avoids angle mismatches due to noise. The kernel H_σ is the sampling of the gaussian low-pass filter

$$H_\sigma(\omega_1, \omega_2) = e^{-\frac{\sigma^2(\omega_1^2 + \omega_2^2)}{2}}, \quad (11)$$

where σ is the spatial standard deviation of the filter. More details of the method can be found in [35].

Once the directional openings have been filtered, the directional signature at pixel \mathbf{x} is defined as

$$s_{\mathbf{x}, l}(i) = \tilde{g}_{\theta_i}(\mathbf{x}). \quad (12)$$

Then, $s_{\mathbf{x}, l}(i)$ is interpolated using cubic b-splines and its maxima correspond

to the multiple orientations existing at pixel \mathbf{x} . Finally, collecting all the orientations estimated at all the pixels in the image provides the multidimensional vector field $\vec{\theta}(\mathbf{x})$, see Figure 15.

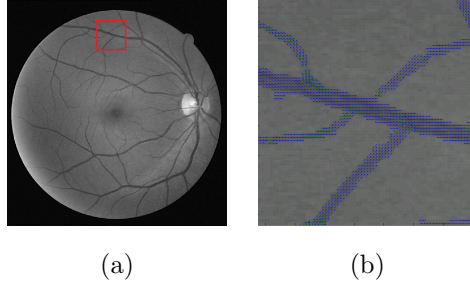


Figure 15: Orientation vector field: (a) Green component of the original fundus image, (b) close-up of the image with its estimated multiple orientation vector field.

The bifurcation angles are calculated by performing the difference between the orientation vectors of each branch around the bifurcation points previously detected. An interior point is chosen as representative of each branch, and its orientation vector will define the orientation of the branch at this pixel. To obtain the interior points, a circular window is placed at each bifurcation and the intersection between the skeleton of the branch and the window is selected. Note that the choice of this pixel is not critical since the orientation vector field varies slowly inside the vessel. Due to the discretization of the orientation space of the multiple orientation method, the orientation is estimated using the ASGVF method [34] which achieves a higher angular resolution than the approach introduced in [33]. Since the ASGVF method only estimates the orientation and it is defined between -90° and 90° degrees, the direction of each vector can be obtained taking into account the location of the representative pixel of each branch in relation to the centre of the bifurcation. Considering the quadrant of the representative pixel, the direction of the vector can be obtained, providing a vector field which is defined between 0° and 360° degrees. Finally, after the conversion of the orientation space, it is possible to calculate the angular difference between the branches contained in the window and thus

to obtain a measure of the bifurcation angle.

6. Results

6.1. Skeleton

The validation of the skeleton method was carried out on DRIVE [25] and STARE [11] databases. Although, in both databases, manual segmentations are included, these segmentations correspond to the complete vasculature not to the vessel centerline which is the goal of this work. For that reason, the homotopic skeleton [27] associated to the hand segmentations was obtained for future comparisons. In Figure 16, the results on some representative images from DRIVE and STARE databases can be observed.

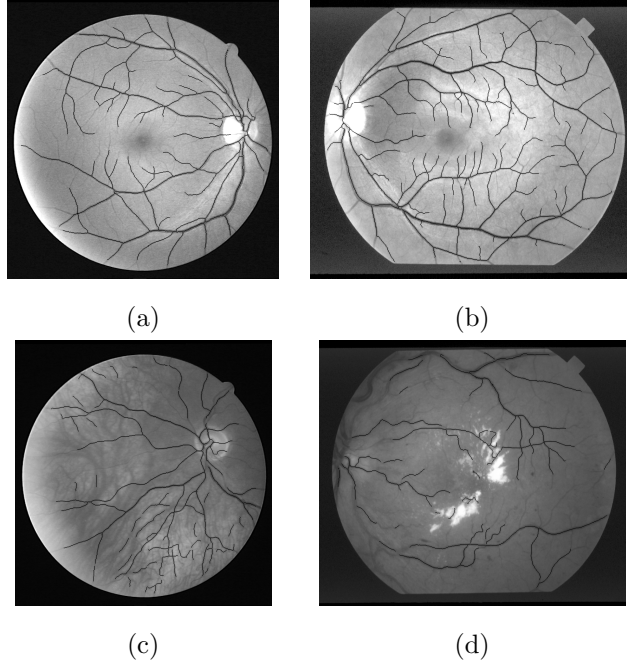


Figure 16: Skeleton results of the proposed method: (a,c) DRIVE images ('19_test' and '23_training') and (b,d) STARE images ('im0255' and 'im0001').

The proposed method was compared with other state-of-the-art methods in two different ways. One approach is based on comparing the results of this work

with methods that firstly segment the vessels and then perform a skeletization process and the other comparison is performed with algorithms that obtain the skeleton directly.

On the one hand, regarding the methods that require a previous segmentation, the presented algorithm was compared with two methods previously published. The first compared method, proposed by Martinez *et al.* [9], uses the local maxima over scales of the magnitude of the gradient and the maximum principal curvature of the Hessian tensor in a multiple pass region growing procedure. The other method analysed in the comparison is the work of Morales *et al.* [7]. As the proposed method, it is based on mathematical morphology and curvature evaluation although the morphological operations used are different as well as the obtained result. In the same way as explained above, the homotopic skeleton was performed after the segmentation process in both cases. On the other hand, as for the methods that obtain directly the retinal vessel center-line, the analysis was focused on two approaches proposed by Walter and Klein method [23] and Bessaid *et al.* method [24] which are based also on the watershed transformation. In Figures 17 and 18, the results of the proposed method on two representative cases extracted from both databases are compared with the results of the state-of-the-art methods mentioned previously.

Avoiding complete vessel segmentation supposes an improvement in the automatic fundus processing since the skeleton is not dependent of a previous stage and the computational cost is reduced by decreasing the number of required steps. Apart from this fact, it must be stressed that an important advantage of the proposed method is its performance in pathological images or with large changes in illumination, as observed in Figure 17 and 18. In those cases, the algorithm presented in this paper works properly and reduces over-segmentation problems which can be found in methods based on a previous segmentation as [9, 7]. With regard to other methods that obtain the skeleton in a direct way and use the watershed transformation instead of the stochastic watershed [23, 24], the proposed work achieves a more robust detection and decreases the number of spurs. Despite good results, it must be mentioned that the main disadvantage

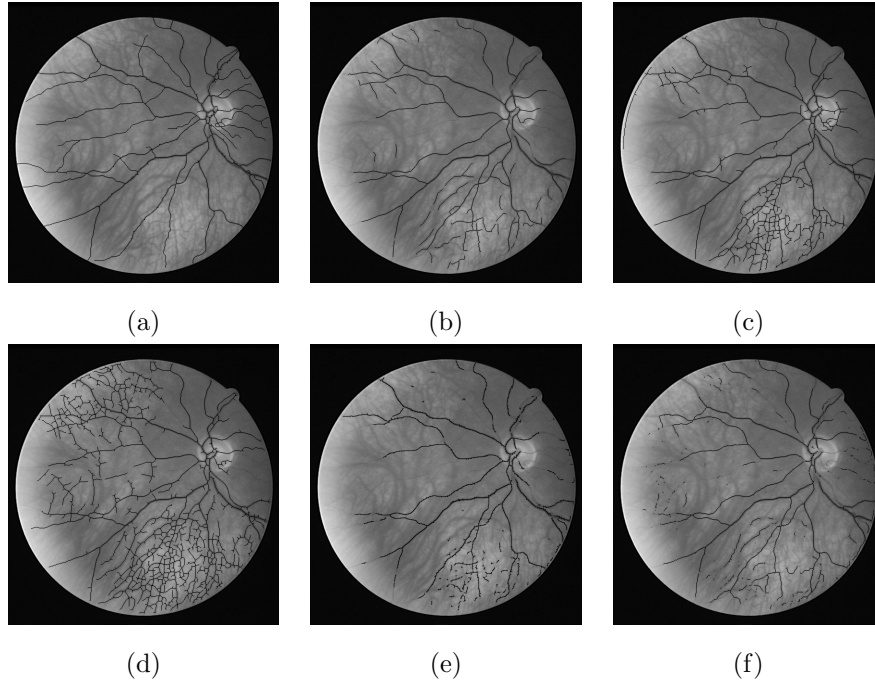


Figure 17: Comparison between different methods on DRIVE image ('23_training'): (a) Ground-truth skeleton, (b) Proposed method, (c) Martinez *et al.* method [9], (d) Morales *et al.* method [7], (e) Bessaid *et al.* method [24] and (f) Walter and Klein method [23].

of the method is that some vessels can lose their continuity if some part of them are not detected and it should be corrected in a post-processing stage.

6.2. Significant points

The validation of the method was carried out on a set of images randomly extracted from VARIA [26], DRIVE [25] and STARE [11] databases. Our results were compared with those provided by the method presented by Calvo *et al.* [8]. To the best of the author's knowledge, it was the state-of-the-art work that provides the best results in this issue and overcomes the problems of other works of the literature. In Figure 19, the significant points detected on some representative images of the database can be observed.

The performance of both methods was evaluated based on four concepts: sen-

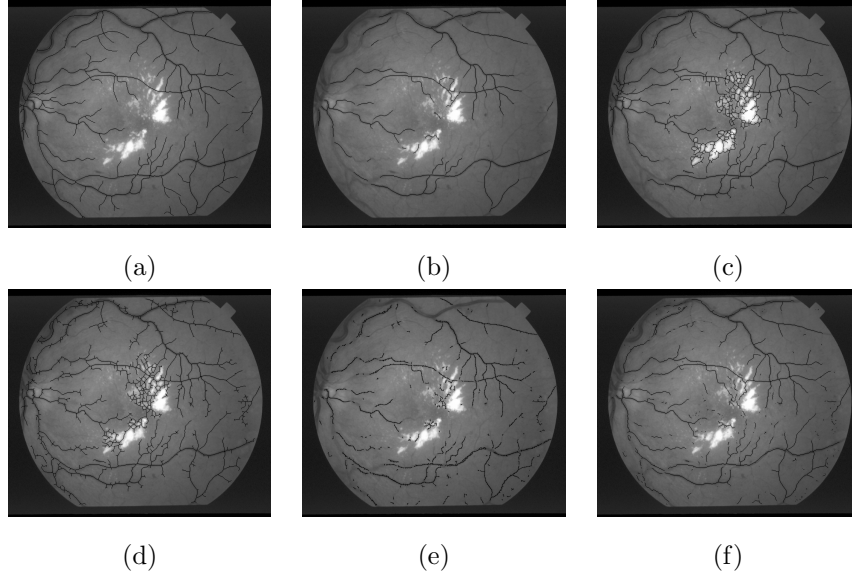


Figure 18: Comparison between different methods on STARE image ('im0001'): (a) Ground-truth skeleton, (b) Proposed method, (c) Martinez *et al.* method [9], (d) Morales *et al.* method [7], (e) Bessaid *et al.* method [24] and (f) Walter and Klein method [23].

sitivity or true positive rate (TPR), precision or positive predictive value (PPV), specificity or true negative rate (TNR) and negative predictive value (NPV). Sensitivity and specificity measure the proportion of positives/negatives that are correctly classified ($TPR = \frac{TP}{TP+FN}$; $TNR = \frac{TN}{TN+FP}$), PPV and NPV assess the quality of the positive/negative results ($PPV = \frac{TP}{TP+FP}$; $NPV = \frac{TN}{TN+FN}$). TP , FP , TN and FN are the true positives, false positives, true negatives and false negatives, respectively. Table 1 and Table 2 detail the values of these parameters for the bifurcation and crossing point detection of the images shown in Figure 19. Table 3 gathers the results of the same analysis but considering at the same time bifurcations and crossovers. Note that, in the validation, only one crossing point is counted for each intersection although if the crossing between two vessels is large enough, the start and end point of the intersection can be observed in the image. Table 4 summarizes the averaged results of the previous tables. From a general point of view, the results of the proposed

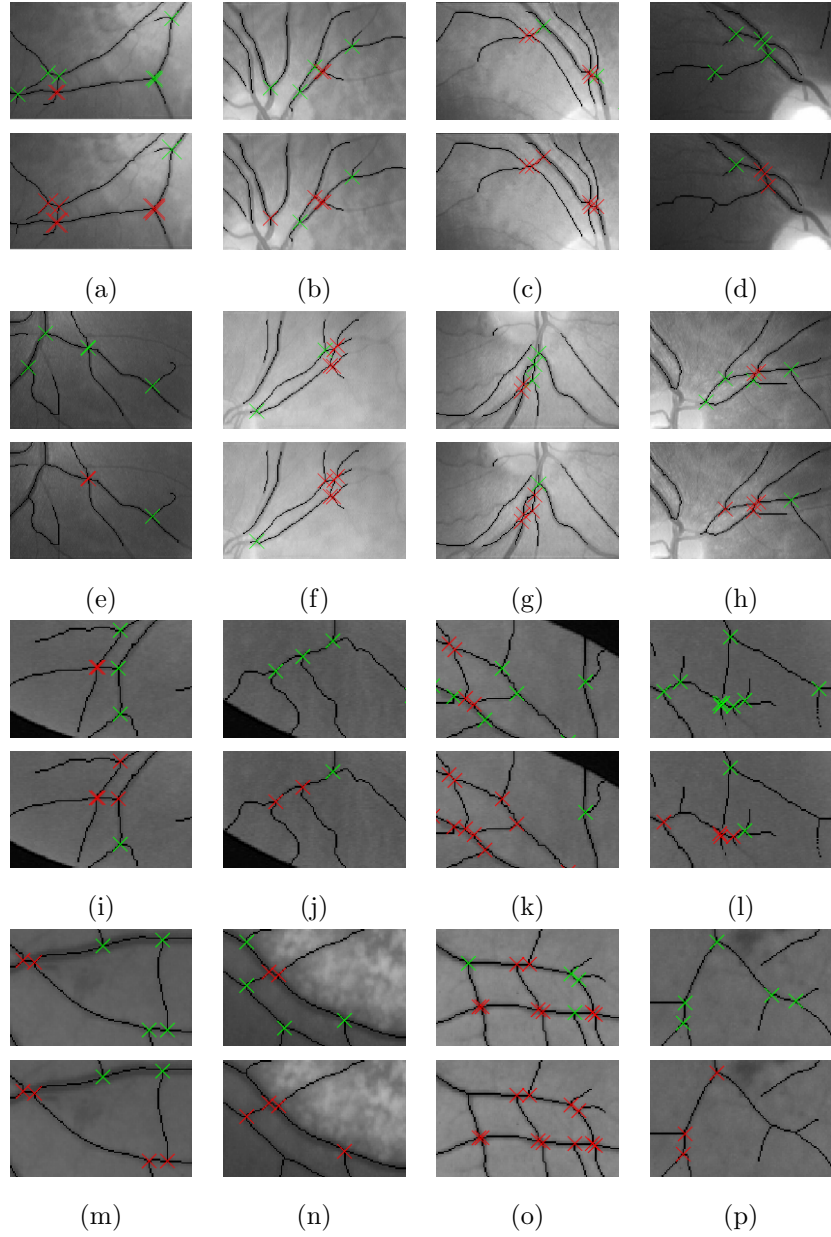


Figure 19: Bifurcation and crossing point detection on images belonging to VARIA, DRIVE and STARE databases: (a-h) Regions of interest of different images. Top row: results provided by the proposed method. Bottom row: results provided by the method presented in [8]. Bifurcation points are marked in green and crossovers in red.

method are better than the method of Calvo *et al.* achieving a $TPR = 1.000$ and a $PPV = 0.908$ for global point detection, i.e. considering bifurcations and crossovers. To point out that the proposed method provides balanced results in terms of TPR, PPV, TNR and NPV for bifurcation and crossing point detection. However, the method of Calvo *et al.* has high sensitivity (TPR) but low specificity (TNR) for crossing detection and vice versa for bifurcations. This is due to the fact that the method of Calvo *et al.* detects numerous false positives and negatives in crossing and bifurcation detection, respectively.

Table 1: Results for bifurcation point detection: true positives (TP), true negative (TN), false positives (FP), false negatives (FN), true positive rate (TPR), positive predictive value (PPV), true negative rate (TNR) and negative predictive value (NPV).

	Figure	TP	TN	FN	FP	TPR	PPV	TNR	NPV
Proposed method	19(a)	5	1	0	0	1.000	1.000	1.000	1.000
	19(b)	4	1	0	0	1.000	1.000	1.000	1.000
	19(c)	2	2	0	0	1.000	1.000	1.000	1.000
	19(d)	3	0	0	1	1.000	0.750	0.000	-
	19(e)	3	0	0	1	1.000	0.750	0.000	-
	19(f)	2	1	2	0	0.500	1.000	1.000	0.333
	19(g)	3	1	0	0	1.000	1.000	1.000	1.000
	19(h)	4	1	0	0	1.000	1.000	1.000	1.000
	19(i)	3	1	0	0	1.000	1.000	1.000	1.000
	19(j)	3	0	0	0	1.000	1.000	-	-
	19(k)	5	2	0	0	1.000	1.000	1.000	1.000
	19(l)	6	0	0	1	1.000	0.857	0.000	-
	19(m)	3	1	0	1	1.000	0.750	0.500	1.000
	19(n)	4	1	0	0	1.000	1.000	1.000	1.000
	19(o)	4	3	2	0	0.667	1.000	1.000	0.600
	19(p)	5	0	0	0	1.000	1.000	-	-
Calvo <i>et al.</i> [8]	19(a)	1	1	4	0	0.200	1.000	1.000	0.200
	19(b)	2	1	2	0	0.500	1.000	1.000	0.333
	19(c)	0	2	2	0	0.000	-	1.000	0.500
	19(d)	1	1	2	0	0.333	1.000	1.000	0.333
	19(e)	1	1	2	0	0.333	1.000	1.000	0.333
	19(f)	1	1	3	0	0.250	1.000	1.000	0.250
	19(g)	1	1	2	0	0.333	1.000	1.000	0.333
	19(h)	1	1	3	0	0.250	1.000	1.000	0.250
	19(i)	1	1	2	0	0.333	1.000	1.000	0.333
	19(j)	1	0	2	0	0.333	1.000	-	0.000
	19(k)	1	2	4	0	1.000	1.000	1.000	0.333
	19(l)	2	1	4	0	0.333	1.000	1.000	0.200
	19(m)	2	2	1	0	0.667	1.000	1.000	0.667
	19(n)	0	1	4	0	0.000	-	1.000	0.200
	19(o)	0	3	6	0	0.000	-	1.000	0.333
	19(p)	0	0	5	0	1.000	1.000	-	0.000

Table 2: Results for crossing point detection: true positives (TP), true negative (TN), false positives (FP), false negatives (FN), true positive rate (TPR), positive predictive value (PPV), true negative rate (TNR) and negative predictive value (NPV).

Figure	TP	TN	FN	FP	TPR	PPV	TNR	NPV
Proposed method	19(a)	1	5	0	0	1.000	1.000	1.000
	19(b)	1	4	0	0	1.000	1.000	1.000
	19(c)	2	2	0	0	1.000	1.000	1.000
	19(d)	0	3	1	0	0.000	-	1.000
	19(e)	0	3	1	0	0.000	-	1.000
	19(f)	1	2	0	2	1.000	0.333	0.500
	19(g)	1	3	0	0	1.000	1.000	1.000
	19(h)	1	4	0	0	1.000	1.000	1.000
	19(i)	1	3	0	0	1.000	1.000	1.000
	19(j)	0	3	0	0	-	-	1.000
	19(k)	2	5	0	0	1.000	1.000	1.000
	19(l)	0	6	1	0	0.000	-	1.000
	19(m)	1	3	1	0	0.500	1.000	1.000
	19(n)	1	4	0	0	1.000	1.000	1.000
	19(o)	3	4	0	2	1.000	0.600	0.667
	19(p)	0	5	0	0	-	-	1.000
Calvo <i>et al.</i> [8]	19(a)	1	2	0	3	1.000	0.250	0.400
	19(b)	1	2	0	2	1.000	0.333	0.500
	19(c)	2	0	0	2	1.000	0.500	0.000
	19(d)	1	2	0	1	1.000	0.500	0.667
	19(e)	1	3	0	0	1.000	1.000	1.000
	19(f)	1	1	0	3	1.000	0.250	0.250
	19(g)	1	1	0	2	1.000	0.333	0.333
	19(h)	1	2	0	2	1.000	0.333	0.500
	19(i)	1	1	0	2	1.000	0.333	0.333
	19(j)	0	1	0	2	-	0.000	0.333
	19(k)	2	1	0	4	1.000	0.333	0.200
	19(l)	1	4	0	2	1.000	0.333	0.667
	19(m)	2	2	0	1	1.000	0.667	0.667
	19(n)	1	2	0	2	1.000	0.333	0.500
	19(o)	3	1	0	5	1.000	0.375	0.167
	19(p)	0	2	0	3	-	-	0.400

6.3. Bifurcation angles

The performance of the method proposed for bifurcation angle computation was evaluated on images belonging to DRIVE database [25]. In Figure 20, the angles measured on two representative images of this database can be observed. Only a region of interest of these images is shown for better visualization.

Table 3: Results for global significant point detection: true positives (TP), false positives (FP), false negatives (FN), true positive rate (TPR) and positive predictive value (PPV).

	Figure	TP	FN	FP	TPR	PPV
Proposed method	19(a)	6	0	0	1.000	1.000
	19(b)	5	0	0	1.000	1.000
	19(c)	4	0	0	1.000	1.000
	19(d)	3	0	1	1.000	0.750
	19(e)	3	0	1	1.000	0.750
	19(f)	3	0	2	1.000	0.600
	19(g)	4	0	0	1.000	1.000
	19(h)	5	0	0	1.000	1.000
	19(i)	4	0	0	1.000	1.000
	19(j)	3	0	0	1.000	1.000
	19(k)	7	0	0	1.000	1.000
	19(l)	6	0	1	1.000	0.857
	19(m)	4	0	1	1.000	0.800
	19(n)	5	0	0	1.000	1.000
	19(o)	7	0	2	1.000	0.778
	19(p)	5	0	0	1.000	1.000
Calvo <i>et al.</i> [8]	19(a)	2	1	3	0.667	0.400
	19(b)	3	0	2	1.000	0.600
	19(c)	2	0	2	1.000	0.500
	19(d)	2	1	1	0.667	0.667
	19(e)	2	2	0	0.500	1.000
	19(f)	2	0	3	1.000	0.400
	19(g)	2	0	2	1.000	0.500
	19(h)	2	1	2	0.667	0.500
	19(i)	2	0	2	1.000	0.500
	19(j)	1	0	2	1.000	0.333
	19(k)	3	0	4	1.000	0.429
	19(l)	3	2	2	0.600	0.600
	19(m)	4	0	1	1.000	0.800
	19(n)	1	2	2	0.333	0.333
	19(o)	3	1	5	0.750	0.375
	19(p)	0	2	3	0.000	0.000

Table 4: Averaged results for bifurcation, crossing and global point detection: true positive rate (TPR), positive predictive value (PPV), true negative rate (TNR) and negative predictive value (NPV).

Method	Bifurcations				Crossings				Global	
	TPR	PPV	TNR	NPV	TPR	PPV	TNR	NPV	TPR	PPV
Proposed	0.948	0.944	0.750	0.903	0.750	0.903	0.948	0.944	1.000	0.908
Calvo <i>et al.</i> [8]	0.367	1.000	1.000	0.288	1.000	0.392	0.432	1.000	0.761	0.496

The method was applied directly to the green component of the original RGB image. The directional openings were performed using an oriented linear structuring element of 7 pixels. This length comes from the trade-off between the curvature of the vessels and the angular resolution of the structuring element (it

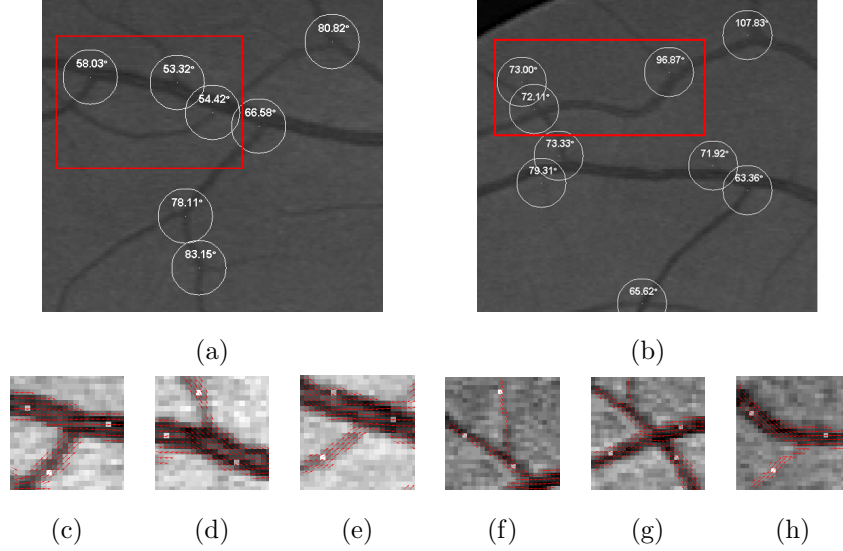


Figure 20: Angles of the bifurcations with the ASGVF orientation vector field on two images from DRIVE database. (a) A region of interest of the ‘19 test’ image. (b) A region of interest of the ‘40 training’ image. (c)-(e) Close up of selected bifurcations marked in red in (a). (f)-(h) Close up of selected bifurcations marked in red in (b). The bright pixels inside the vessels indicate at what points the value of the vector field were taken.

provides $\Delta\theta = 15^\circ$ and produces a filter bank with 12 branches). The low-pass filtering of the directional openings is performed using $\sigma=1$. The parameters of the orientation estimation were chosen to deal with the particular resolution of DRIVE database (565×584). However, the orientation estimation method can be improved by considering a multiscale approach as described in [33]. There, the estimation of the orientation properties is provided by directional openings by line segments of variable length, which produce directional signatures for various scales.

In this paper, two methods for the computation of bifurcation angles were compared: the proposed method based on the orientation vector field and the method described in [7]. The main difference is that [7] requires to fit the branches of the skeleton by straight lines to measure the bifurcation angles. Moreover, it needs to perform a tracking process of the branches that compose

the retinal tree to distinguish between parent and daughter branches. Afterwards, the bifurcation angles are measured as the angles formed by the daughter branches of each bifurcation point. Specifically, the branches are fitted by straight lines using least-squares in a circular window centred on these points. The main drawback of this type of methods is its excessive dependence between the skeleton pixels and the measured angle. Figure 21 shows the measured angles provided by the method described in [7] on different expert hand-made segmentations.

Comparing the results shown in Figure 21, it can be appreciated that the measured angles can be quite different, reaching a maximum angle variation on the same image of around 7% in the Figure 21(a) and around 6% in the Figure 21(b). Note that the variation is due to the fact that the fitted line of the branches depends directly on the skeleton pixels considered. Only the change in one pixel of the skeleton can modify the fitted line and therefore the calculated angle. The angles shown in the Figure 21(a) and 21(b) correspond with the existing bifurcations within the red rectangles of the Figure 20(a) and 20(b) respectively. Since the method proposed in this paper is based on the main orientations and avoids the linear fitting of the branches, the provided measurements are much more accurate, stable and faithful to reality.

7. Conclusions

In this paper, a method for significant point detection of the retinal vascular tree was presented. Bifurcation and crossover identification is a difficult task due to the complexity of the vascular network. The most challenging part is the correct identification of the crossing points. This work proposes the use of hit-or-miss transformation (HTM) to detect terminal, bifurcation and simple crossing points. However, this transformation does not allow to characterize complex intersections, which are the most common in the vascular network. To deal with this problem, a post-processing stage is carried out on the points detected initially as bifurcations. The main idea to differentiate between a bifurcation

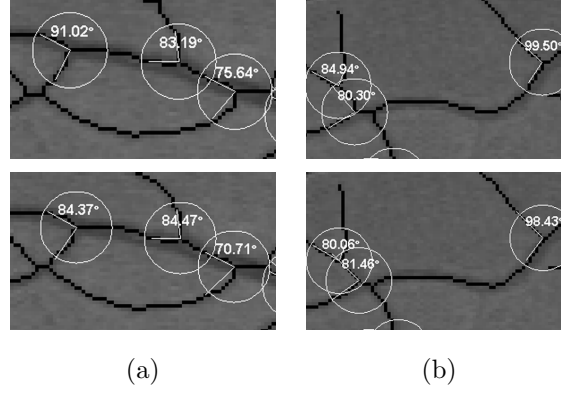


Figure 21: Bifurcation angles provided by the method described in [7] on the selected bifurcations of the Figure 20. This method is based on the skeletonization of a segmented (binary) image. (a) Skeletonization of two different expert segmentations of the ‘19 test’ image. (b) Skeletonization of two different expert segmentations of the ‘40 training’ image. Slight differences in the skeleton cause large differences in the measured angles.

and a crossing point is that the crossing points belong to a sort of close loop formed by the intersection of two vessels.

The significant points of the retinal network must be detected on the vessel centerline. So, a method to determine the vascular skeleton on a fundus image was also proposed. It is based on mathematical morphology and curvature evaluation and makes use of the stochastic watershed to extract the vessel centerline in a direct way.

Then, the bifurcation points that were detected as the method presented in the paper were used later to measure the bifurcation angles of the retinal vascular tree through the multiple orientation vector field of each branch.

The performance of the method for significant retinal point detection was compared with other work of the literature. Quantitative quality parameters in point identification were calculated despite the difficulty in validation due to the lack of public databases that include ground-truth points. The obtained results demonstrate that our approach works properly for bifurcation and crossover detection. Note that the method of Calvo *et al.* detected numerous false negatives

and positives in the identification of the bifurcation and crossing points, respectively. If the performance of the global significant point detection is considered, our method detects more true positives and fewer false positives and negatives.

The algorithms presented for skeleton extraction and bifurcation angle measurement were also validated achieving promising results.

As future work, a wider validation of the significant point method should be performed. A ground truth of the significant points should be generated to carry out this validation. If the ground truth was publicly available, the comparison between methods would be facilitated.

Acknowledgments

This work was supported by the Ministerio de Economía y Competitividad of Spain, Project ACRIMA (TIN2013-46751-R). The authors would like to thank people who provide the public databases used in this work (DRIVE, STARE and VARIA).

References

- [1] M. M. Fraz, P. Remagnino, A. Hoppe, B. Uyyanonvara, A. Rudnicka, C. Owen, S. Barman, Blood vessel segmentation methodologies in retinal images: A survey, *Computer Methods and Programs in Biomedicine* 108 (1) (2012) 407 – 433.
- [2] J. Kanski, B. Bowling, *Clinical Ophthalmology: A Systematic Approach*, 7th Edition, Elsevier Health Sciences, 2011.
- [3] A. Bhuiyan, B. Nath, J. Chua, K. Ramamohanarao, Automatic detection of vascular bifurcations and crossovers from color retinal fundus images, in: *Signal-Image Technologies and Internet-Based System*, 2007. SITIS '07. Third International IEEE Conference on, 2007, pp. 711–718.
- [4] G. Azzopardi, N. Petkov, Detection of retinal vascular bifurcations by trainable v4-like filters, in: P. Real, D. Diaz-Pernil, H. Molina-Abril,

- A. Berciano, W. Kropatsch (Eds.), *Computer Analysis of Images and Patterns*, Vol. 6854 of *Lecture Notes in Computer Science*, Springer Berlin Heidelberg, 2011, pp. 451–459.
- [5] V. Bevilacqua, S. Cambò, L. Cariello, G. Mastronardi, A combined method to detect retinal fundus features, in: *Proceedings of IEEE European Conference on Emergent Aspects in Clinical Data Analysis*, 2005, pp. 1–6.
 - [6] M. E. Martinez-Perez, A. D. Hughes, A. V. Stanton, S. A. Thorn, N. Chapman, A. A. Bharath, K. H. Parker, Retinal vascular tree morphology: A semi-automatic quantification, in: *Biomedical Engineering*, Vol. 49, 2002.
 - [7] S. Morales, V. Naranjo, A. Navea, M. Alcañiz, Computer-aided diagnosis software for hypertensive risk determination through fundus image processing, *Biomedical and Health Informatics, IEEE Journal of* 18 (6) (2014) 1757–1763.
 - [8] D. Calvo, M. Ortega, M. G. Penedo, J. Rouco, Automatic detection and characterisation of retinal vessel tree bifurcations and crossovers in eye fundus images, *Computer Methods and Programs in Biomedicine* 103 (1) (2011) 28 – 38.
 - [9] M. E. Martinez-Perez, A. D. Hughes, S. A. Thom, A. A. Bharath, K. H. Parker, Segmentation of blood vessels from red-free and fluorescein retinal images, *Medical Image Analysis* 11 (2007) 47–61.
 - [10] X. Jiang, D. Mojon, Adaptive local thresholding by verification-based multithreshold probing with application to vessel detection in retinal images, *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 25 (2003) 131–137.
 - [11] A. Hoover, V. Kouznetsova, M. Goldbaum, Locating blood vessels in retinal images by piecewise threshold probing of a matched filter response, *IEEE Transactions on Medical Imaging* 19 (2000) 203–210.

- [12] M. Al-Rawi, M. Qutaishat, M. Arrar, An improved matched filter for blood vessel detection of digital retinal images, *Computers in Biology and Medicine* 37 (2) (2007) 262–267.
- [13] C. Sinthanayothin, J. F. Boyce, H. L. Cook, T. H. Williamson, Automated localisation of the optic disc, fovea, and retinal blood vessels from digital colour fundus images, *British Journal of Ophthalmology* 83 (1999) 902–910.
- [14] E. Ricci, R. Perfetti, Retinal blood vessel segmentation using line operators and support vector classification, *Medical Imaging, IEEE Transactions on* 26 (10) (2007) 1357–1365.
- [15] D. Marín, A. Aquino, M. E. Gegúndez-Arias, J. M. Bravo, A new supervised method for blood vessel segmentation in retinal images by using gray-level and moment invariants-based features, *Medical Imaging, IEEE Transactions on* 30 (1) (2011) 146–158.
- [16] G. B. Kande, P. V. Subbaiah, T. S. Savithri, Unsupervised fuzzy based vessel segmentation in pathological digital fundus images, *Journal of medical systems* 34 (5) (2010) 849–858.
- [17] F. Zana, J. C. Klein, Segmentation of vessel-like patterns using mathematical morphology and curvature evaluation, *IEEE Transactions on Image Processing* 10 (2001) 1010–1019.
- [18] A. Mendonça, A. Campilho, Segmentation of retinal blood vessels by combining the detection of centerlines and morphological reconstruction, *Medical Imaging, IEEE Transactions on* 25 (9) (2006) 1200–1213.
- [19] K. Sun, Z. Chen, S. Jiang, Y. Wang, Morphological multiscale enhancement, fuzzy filter and watershed for vascular tree extraction in angiogram, *Journal of medical systems* 35 (5) (2011) 811–824.
- [20] L. Chen, Y. Ju, S. Ding, X. Liu, Topological vascular tree segmentation for retinal images using shortest path connection, in: *Image Processing (ICIP), 2011 18th IEEE International Conference on*, 2011, pp. 2137–2140.

- [21] M. Sofka, C. Stewart, Retinal vessel centerline extraction using multiscale matched filters, confidence and edge measures, *Medical Imaging, IEEE Transactions on* 25 (2006) 1531–1546.
- [22] C. Wu, J. Kang Derwent, P. Stanchev, Retinal vessel radius estimation and a vessel center line segmentation method based on ridge descriptors, *Journal of Signal Processing Systems* 55 (1-3) (2009) 91–102.
- [23] T. Walter, J. Klein, A computational approach to diagnosis of diabetic retinopathy, in: 6th Conference on Systemics, Cybernetics and Informatics (SCI), 2002, pp. 521–526.
- [24] A. Bessaid, A. Feroui, M. Messadi, Detection of blood vessels from retinal images using watershed transformation, *Journal of Mechanics in Medicine and Biology* 09 (04) (2009) 633–642.
- [25] J. Staal, M. Abramoff, M. Niemeijer, M. Viergever, B. van Ginneken, Ridge-based vessel segmentation in color images of the retina, *Medical Imaging, IEEE Transactions on* 23 (4) (2004) 501–509.
- [26] M. Ortega, M. Penedo, J. Rouco, N. Barreira, M. Carreira, Personal verification based on extraction and characterisation of retinal feature points, *Journal of Visual Languages and Computing* 20 (2) (2009) 80 – 90.
- [27] P. Soille, *Morphological Image Analysis: Principles and Applications*, 2nd Edition, Springer-Verlag New York, Inc., 2003.
- [28] S. Beucher, F. Meyer, *The Morphological Approach to Segmentation : The Watershed Transformation*, E. Dougherty Ed., 1992, Ch. 12, pp. 433–481.
- [29] J. Angulo, D. Jeulin, Stochastic watershed segmentation, in: *Proc. of the 8th International Symposium on Mathematical Morphology (ISMM'2007)*, 2007, pp. 265–279.
- [30] R. O. Duda, P. E. Hart, *Pattern Classification and Scene Analysis*, John Wiley & Sons Inc, 1973.

- [31] R. C. Gonzalez, R. E. Woods, S. L. Eddins, Digital Image Processing using MATLAB, Pearson Prentice Hall, 2004.
- [32] T. Walter, Application de la Morphologie Mathématique au diagnostic de la Rétinopathie Diabétique à partir d'images couleur, École Nationale Supérieure des Mines de Paris, 2003, Ch. 3, pp. 39–46.
- [33] J. Angulo, R. Verdú-Monedero, J. Morales-Sánchez, Multiscale local multiple orientation estimation using Mathematical Morphology and B-spline interpolation, Proc. of 7th Int. Symposium on Image and Signal Processing and Analysis (ISPA) (2011) 575 – 578.
- [34] R. Verdú-Monedero, J. Angulo, J. Serra, Anisotropic morphological filters with spatially-variant structuring elements based on image-dependent gradient fields, IEEE Trans. Image Processing 20 (1) (2011) 200–212.
- [35] A. G. Legaz-Aparicio, R. Verdú-Monedero, J. Morales-Sánchez, J. Larrey-Ruiz, J. Angulo, Detection of retinal vessel bifurcations by means of multiple orientation estimation based on regularized morphological openings, in: XIII Mediterranean Conference on Medical and Biological Engineering and Computing 2013, Vol. 41 of IFMBE Proceedings, Springer International Publishing, 2014, pp. 317–320.

- Artículo 5: A.G. Legaz-Aparicio, R. Verdú-Monedero, K. Engan, “Noise Robust and Rotation Invariant Framework for Texture Analysis and Classification”, Applied Mathematics and Computation, Volume 335, pp. 124 a 132, October 2018. ISI-JCR(2017): 2.300, Posición 21 de 252 (T1, Q1), cat MATHEMATICS, APPLIED.

- Artículo 6: Álar-Ginés Legaz-Aparicio, Rafael Verdú-Monedero, Jesús Angulo, “Adaptive spatially variant morphological filters based on a multiple orientation vector field”, Mathematical modelling in Engineering & Human Behaviour 2016.

Adaptive spatially variant morphological filters based on a multiple orientation vector field.

Álvar-Ginés Legaz-Aparicio (1), Rafael Verdú-Monedero (1), Jesús Angulo (2)

(1) Universidad Politécnica de Cartagena, Cartagena, 30202, Spain

(2) Centre de Morphologie Mathématique, MINES ParisTech, 77305 Fontainebleau Cedex, France

1. Introduction

Mathematical morphology is a technique for the analysis of spatial structures which provides powerful methods for non-linear image processing [1]. It uses a kernel called structuring element (SE) to probe the neighborhood of each pixel of an image and then apply a particular transformation (i.e., erosion, dilation, opening, closing, etc.). Mathematical morphology plays an important role in some image processing tasks such as segmentation, feature extraction or denoising (see e.g. [2], [3]).

Traditionally, structuring elements have been spatially invariant, keeping the same shape and orientation in all pixels of the image. However, in the last years, adaptive structuring elements, which change their shape and orientation according to the local features of the image, have been proposed [4]-[6]. There are two important aspects to be addressed: (1) how to construct adaptive structuring elements which are suitable for the image analysis task, and (2) how to properly define morphological operators with adaptive structuring elements. According to Roerdink [7], there are two categories of adaptiveness:

- Translation invariance is replaced by various other forms of invariance, with their associated group morphologies.
- Structuring elements become dependent on position or the input image itself, leading to adaptive morphology.

Among the methods of adaptive morphology, those that use an orientation vector field to adapt the SE have shown good ability to preserve the structures of the images. The orientation vector field can provide a single orientation at each pixel based on the average square gradient [8], or based on the local structure tensor [9]. These methods show excellent results in scenarios where there is only one dominant orientation, but they do not consider the possibility that a pixel may have associated several predominant orientations, as in the case of crossing lines, corners and junctions (also known as X, L and Y-junctions, respectively) [10]. On the other hand, methods that estimate multiple orientations show excellent results at the expense of higher computational cost. The main approaches to estimate multiple orientations are based on a bank of filters whose kernels have different shapes, orientations and scales; unfortunately these methods have not been taken into account to design spatially-variant structuring elements so far.

This paper aims to formulate and implement spatially-variant versions of morphological filters which use a multiple orientation vector field to adapt the shape and orientation of the SE to the image structures. The multiple orientation is estimated at each pixel by a bank of morphological filters. These filters are directional openings whose output are filtered in order to extend the multiple orientation information to the surrounding neighborhood. Finally, the responses of each filtered opening are combined to provide a multiple orientation vector field.

2. Methodology

2.1 Multiple orientation estimation framework

Let $f(\mathbf{x}) : E \rightarrow \mathbb{R}$ be a gray-level image, where the support space is $E \subset \mathbb{Z}^2$ and the pixel coordinates are $\mathbf{x} = (x, y)$. Let us define $g(\mathbf{x})$ as the absolute value of the gradient of $f(\mathbf{x})$, i.e., $g(\mathbf{x}) = \|\nabla f(\mathbf{x})\| = \sqrt{\left(\frac{df(x,y)}{dx}\right)^2 + \left(\frac{df(x,y)}{dy}\right)^2}$. The directional opening of $g(\mathbf{x})$ by a linear (symmetric) structuring element (SE) of length l and direction θ is defined as the directional erosion of g by $L^{\theta,l}$ followed by the

directional dilation with the same SE: $\gamma_{L^{\theta,l}} = \delta_{L^{\theta,l}}[\varepsilon_{L^{\theta,l}}(g)](\mathbf{x})$, where the directional erosion and dilation are respectively $\delta_{L^{\theta,l}}(f)(\mathbf{x}) = (f \oplus L^{\theta,l})(\mathbf{x}) = \bigvee_{\mathbf{y} \in L^{\theta,l}} f(\mathbf{x} + \mathbf{y})$ and $\varepsilon_{L^{\theta,l}}(f)(\mathbf{x}) = (f \ominus L^{\theta,l})(\mathbf{x}) = \bigwedge_{\mathbf{y} \in L^{\theta,l}} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$. The proposed orientation model is based on a decomposition of the gradient information by families of linear openings, $\{\gamma_{L^{\theta,l}}\}_{l \in I}$, according to a particular discretization of the orientation space $\{\theta_i\}_{i \in I}$. In the next step of the proposed method, a filtering is performed at each one of the directional openings. The filtering diffuses the orientation information and avoids angle mismatches due to noise. Once the directional openings have been filtered, the directional signature at pixel \mathbf{x} is defined as $s_{x,l}(i) = \tilde{g}_{\theta_i}(\mathbf{x})$. Then, $s_{x,l}(i)$ is interpolated using cubic b-splines and its maxima correspond to the multiple orientations existing at pixel \mathbf{x} . Finally, collecting all the orientations estimated at all the pixels in the image provides the multidimensional vector field $\vec{\theta}(\mathbf{x})$.

2.2 Spatially-variant morphological operators

In the standard formulation, the dilation (erosion) filter consist in computing for each pixel the maximum (minimum) of the image values belonging to a fixed neighborhood defined by the SE. In the spatially-variant version, according to the framework proposed by Maragos and Vachier [4], the structuring element map (SEM), also known as structuring function, is not fixed but a spatially-variant SE, i.e. a map \mathcal{A} that assigns a possibly different set or function $\mathcal{A}(\mathbf{x})$ at each point \mathbf{x} of space \mathbb{E} . This allows for the following spatial adaptively rule called adaptive window [4], where the operators are flat and use a spatially-varying (SV) set-valued SEM, $\mathcal{A} : \mathbb{E} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{E})$. According to this approach the dilation and erosion is $\delta_{\mathcal{A}(\mathbf{x})}(f)(\mathbf{x}) = (f \oplus \mathcal{A}(\mathbf{x}))(\mathbf{x}) = \bigvee_{\mathbf{y} \in \mathcal{A}(\mathbf{x})} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ and $\varepsilon_{\mathcal{A}(\mathbf{x})}(f)(\mathbf{x}) = (f \ominus \mathcal{A}(\mathbf{x}))(\mathbf{x}) = \bigwedge_{\mathbf{y} \in \mathcal{A}(\mathbf{x})} f(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ [5]. The operator $\delta_{\mathcal{A}(\mathbf{x})}$ and $\varepsilon_{\mathcal{A}(\mathbf{x})}$ are adjunct due to the fact that the structuring elements are derived only once from the input image [7]. Hence, the operator opening and closing can be defined as $\gamma_{\mathcal{A}(\mathbf{x})} = (\delta_{\mathcal{A}(\mathbf{x})} \circ \varepsilon_{\mathcal{A}(\mathbf{x})})(f)$ and $\psi_{\mathcal{A}(\mathbf{x})} = (\varepsilon_{\mathcal{A}(\mathbf{x})} \circ \delta_{\mathcal{A}(\mathbf{x})})(f)$, respectively. In addition, the adjunction property allows to make up more complex filters by combining spatially variant opening and closing, providing sequential filters which show excellent results removing images corrupted by dark and bright artifacts [2]. In this work we propose the following filters: the spatially-variant version of the close-open filter which is defined as $(\psi_{\mathcal{A}(\mathbf{x})} \circ \gamma_{\mathcal{A}(\mathbf{x})})(f)$ and the open-close filter which is defined as $(\gamma_{\mathcal{A}(\mathbf{x})} \circ \psi_{\mathcal{A}(\mathbf{x})})(f)$. It is important to remember that the spatially variant structuring elements are designed in a way that near the edges of structures the image is filtered preserving these edges and minimizing inter-region filtering whereas far from the edges the structuring elements are designed to maximize the intra-region filtering.

2.3 Adaptive structuring elements

In this work we use a multiple orientation vector field to make up structuring elements which can adapt their shape and orientation. The proposed SE is formed by the union of M structuring elements based on each one of the M detected orientations at each pixel \mathbf{x} , i.e. $\mathcal{A}(\mathbf{x}) = \bigcup_{i \in M} W^{\theta_i(\mathbf{x}), r(\mathbf{x})}$, where W is the function that determines the shape of the set, $\theta(\mathbf{x})$ establishes the orientation of \mathcal{A} at each pixel and $r(\mathbf{x})$ sets the distance to the nearest edge.

3. Results

In this section, spatially-variant operators based on a multiple orientation vector field (MOVF) are compared to spatially-variant operators based on single orientation vector field (SOVF). The single orientation vector field is obtained by means of the local structure tensor (LST) [9]. The input image used in this comparison has been corrupted by dark and bright artifacts, as can be seen in Fig.2. (a). The operators used in the comparison are the spatially-variant closing $\psi_{\mathcal{A}(\mathbf{x})}(f)$ and the sequential morphological filter formed by a closing followed by an opening $(\gamma_{\mathcal{A}(\mathbf{x})} \circ \psi_{\mathcal{A}(\mathbf{x})})(f)$. These filters have been chosen due to their good performances removing the artifacts of this image [2]. The operators based on the single orientation vector field use an oriented ellipse to make up the structuring element as follows: the major semi-axis is 9 pixel long and the minor semi-axis is 1 pixel long near the edges and change gradually his eccentricity until both semi-axes are 5 pixel long in homogeneous areas. On the other hand, the operators based on the multiple orientation vector field use the same elliptical function but the SE is formed by the union of M single oriented ellipses, where M is the number of main orientations detected at

each pixel. Fig.1(b) and Fig.1(c) show some elliptical kernels which are orientated according to their respective vector fields. The visual comparison is shown in Fig.2(d)-(i) whereas the numerical results have been gathered in Table 1. As can be seen, the proposed spatially-variant filters based on a multiple orientation vector field achieve a better preservation of structures with multiple orientations compared to the space-variant filters based on a single orientation vector field.

		PSNR (dB)	SSIM (%)
Input (noisy) image		18.43	69.57
Closing	LST	19.23	64.22
	Proposed	19.69	70.58
Opening-Closing	LST	21.08	72.57
	Proposed	22.04	78.26

Table 1: Numerical results of Figure 1.

4. Conclusion

This work has presented a novel formulation and implementation of spatially-variant morphological filters which use a multiple orientation vector field to adapt the shape and orientation of the SE to the image structures. The aims of this paper is to illustrate the ability of the proposed spatially-variant filters to remove artifacts in images while the main structures with multiple orientation (e.g. bifurcation, crossover or junctions) are preserved. The numerical and visual outcomes show the excellent performances of the proposed filters. As future work, comparisons with other filters and noise sources also will be done.

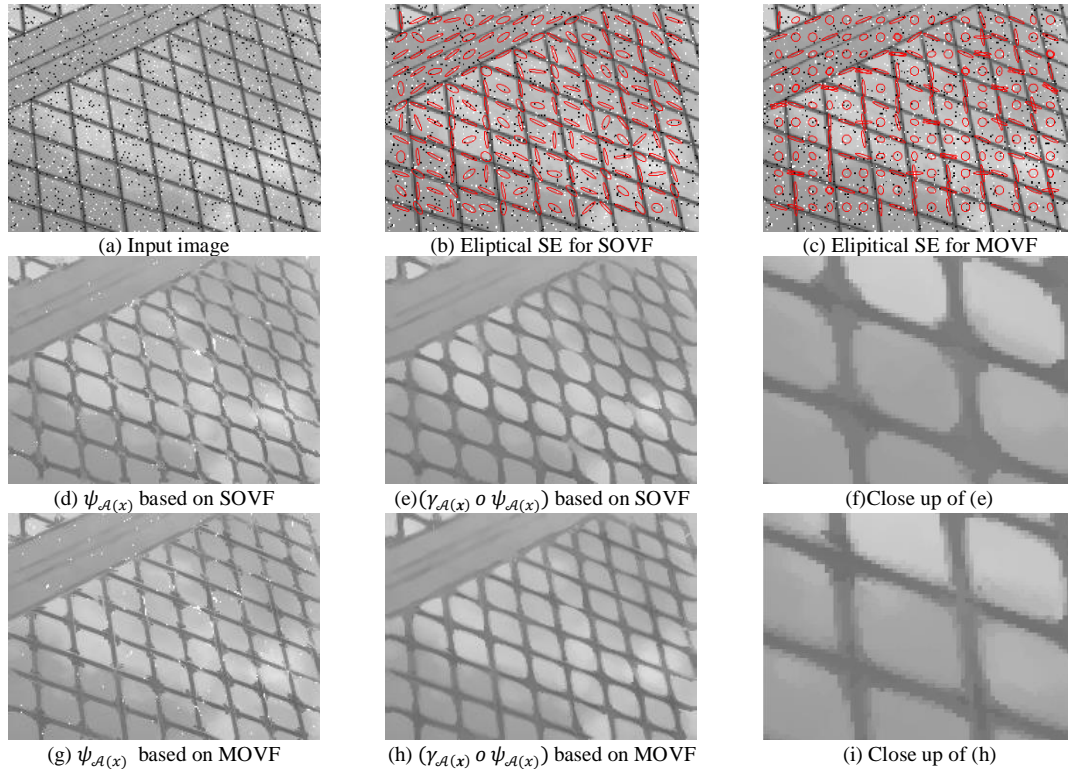


Figure 1: Results of spatially-variant morphological operators based on single and multiple orientations.

References

- [1] Serra, J., 1982. Image Analysis and Mathematical Morphology. Volume I. Academic Press, London.
- [2] Soille, P., 2003. Morphological Image Analysis: Principles and Applications. 2 ed., Springer-Verlag.
- [3] Najman, L., Talbot, H. (Eds.), 2013. Mathematical Morphology: From Theory to Applications. John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA.

- [4] Maragos, P., Vachier, C., 2009. Overview of adaptive morphology: Trends and perspectives, 16th IEEE ICIP
- [5] Bouaynaya, N., Schonfeld, D., 2008. Theoretical foundations of spatially variant mathematical morphology - part II: Gray-level images. *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* 30, 837–850.
- [6] Cúric, V., Landström, A., Thurley, M.J., Hendriks, C.L.L., 2014. Adaptive mathematical morphology – a survey of the field. *Pattern Recognition Letters* 47, 18 – 28.
- [7] Roerdink, J., 2009. Adaptivity and group invariance in mathematical morphology. 16th IEEE ICIP.
- [8] Verdú-Monedero, R., Angulo, J., Serra, J., 2011. Anisotropic morphological filters with spatially-variant structuring elements based on image-dependent gradient fields. *IEEE Trans. Image Processing* 20, 200–212.
- [9] Landström, A., Thurley, M.J., 2013. Adaptive morphology using tensor-based elliptical structuring elements. *Pattern Recognition Letters* 34, 1416 – 1422.
- [10] H. Knutsson, 1989. Representing local structure using tensors. *Proc. of the 6th Scandinavian Conference of Image Analysis*, pp. 244251.

- Artículo 7: A.G. Legaz-Aparicio, R. Verdú-Monedero, J. Angulo, “Adaptive morphological filters based on a multiple orientation vector field dependent on image local features”, Journal of Computational and Applied Mathematics, Vol. 330, pp. 965-981, March 2018. ISI-JCR(2017): 1.632, Posición 49 de 252 (T1, Q1), cat MATHEMATICS, APPLIED.

Adaptive morphological filters based on a multiple orientation vector field dependent on image local features

Álvar-Ginés Legaz-Aparicio¹, Rafael Verdú-Monedero¹, Jesús Angulo²

¹Universidad Politécnica de Cartagena, Cartagena, 30202, Spain

²MINES ParisTech, PSL-Research University, CMM-Centre de Morphologie Mathématique, France

Abstract

This paper addresses the formulation of adaptive morphological filters based on spatially-variant structuring elements. The adaptivity of these filters is achieved by modifying the shape and orientation of the structuring elements according to a multiple orientation vector field. This vector field is provided by means of a bank of directional openings which can take into account the possible multiple orientations of the contours in the image. After reviewing and formalizing the definition of the spatially-variant dilation, erosion, opening and closing, the proposed structuring elements are described. These spatially-variant structuring elements are based on ellipses which vary over the image domain adapting locally their orientation according to the multiple orientation vector field and their shape (the eccentricity of the ellipses) according to the distance to relevant contours of the objects. The proposed adaptive morphological filters are used on gray-level images and are compared with spatially-invariant filters, with spatially-variant filters based on a single orientation vector field, and with adaptive morphological bilateral filters. Results show that the morphological filters based on a multiple orientation vector field are more adept at enhancing and preserving structures which contains more than one orientation.

Keywords: Mathematical morphology, adaptive morphology, adaptive structuring elements, spatially-variant structuring elements

1. Introduction

Mathematical morphology is a nonlinear image processing methodology useful for solving efficiently many image analysis tasks [1]. From a mathematical point of view, it is based on two basic operators, dilation and erosion, which correspond respectively to the convolution in the max-plus algebra and its dual convolution. More precisely, in Euclidean (translation invariant) mathematical morphology, the pair of adjoint and dual operators dilation (sup-convolution) $(f \oplus b)(x)$ and erosion (inf-convolution) $(f \ominus b)(x)$ of an image $f : E \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ are given by [2, 3]:

$$\begin{cases} \delta_b(f)(x) = (f \oplus b)(x) = \sup_{y \in E} \{f(y) + b(y - x)\}, \\ \varepsilon_b(f)(x) = (f \ominus b)(x) = \inf_{y \in E} \{f(y) - b(y + x)\}, \end{cases} \quad (1)$$

where $b : \mathbb{R}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$ is the structuring function which determines the effect of the operator. The structuring function plays a similar role to the kernel in classical linear filtering using convolution. By allowing infinity values, the further convention for ambiguous expressions should be considered: $f(y) + b(x - y) = -\infty$ when $f(y) = -\infty$ or $b(x - y) = -\infty$, and that $f(y) - b(y + x) = +\infty$ when $f(y) = +\infty$ or $b(y + x) = -\infty$. We easily note that both are invariant under translations (i.e., commute with the translation operator) in the spatial (“horizontal”) space E and in the image intensity (“vertical”) space $\overline{\mathbb{R}}$, i.e.,

$$f(x) \mapsto f_{(y,\alpha)}(x) = f(x - y) + \alpha, \quad (2)$$

with $y \in E$ and $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$, then

$$\delta_b(f_{(y,\alpha)})(x) = \delta_b(f)(x - y) + \alpha. \quad (3)$$

The structuring function is typically a parametric family $b_t(x)$, where $t > 0$ is the scale parameter. In particular, the canonical structuring function is the paraboloidal shape (i.e., square of the Euclidean distance) [4, 5]:

$$p_t(x) = -\frac{\|x\|^2}{2t}. \quad (4)$$

Due to its properties of semigroup, dimension separability and invariance to transform domain, the structuring function $p_t(x)$ plays a similar role to the Gaussian kernel in (linear) convolution-based filtering. The corresponding quadratic dilation and erosion by $p_t(x)$ are related to the following initial-value Hamilton–Jacobi first-order partial differential equation (Hamilton–Jacobi PDE) [6, 7]:

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} = \pm \frac{1}{2} \|\nabla u\|^2, & x \in \mathbb{R}^n, \quad t > 0 \\ u(x, 0) = f(x), & x \in \mathbb{R}^n \end{cases} \quad (5)$$

This Hamilton–Jacobi PDE does not admit classic (i.e., everywhere differentiable) solutions but can be studied in the framework of the theory of viscosity solutions [8]. It is well known that the solutions of the Cauchy problem (5) are given by the so-called Hopf–Lax–Oleinik formulas [9], for + sign and – sign, respectively:

$$u(x, t) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(y) - \frac{\|x - y\|^2}{2t} \right\} = (f \oplus p_t)(x) \quad (\text{for + sign}), \quad (6)$$

$$u(x, t) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ f(y) + \frac{\|x - y\|^2}{2t} \right\} = (f \ominus p_t)(x) \quad (\text{for – sign}). \quad (7)$$

Such PDE model is fundamental to continuous mathematical morphology, and research on numerical schema for the solution of spatially-variant counterparts of (5) is still active [10].

The theory of morphological filtering is based on the opening $(f \circ b)(x)$ and closing $(f \bullet b)(x)$ operators, obtained respectively by the composition product of erosion-dilation and dilation-erosion using the same structuring function, i.e.,

$$\begin{cases} \gamma_b(f)(x) = (f \circ b)(x) = ((f \ominus b) \oplus b)(x) = \sup_{z \in E} \inf_{y \in E} \{f(y) - b(y - z) + b(z - x)\}, \\ \varphi_b(f)(x) = (f \bullet b)(x) = ((f \oplus b) \ominus b)(x) = \inf_{z \in E} \sup_{y \in E} \{f(y) + b(z - y) - b(x - z)\}. \end{cases} \quad (8)$$

In order to have a better insight of the effect of the opening and the closing of a function, let us rewrite $(f \circ b)(x)$ as follows:

$$\gamma_b(f) = \bigvee \{b_{(y, \alpha)} \mid (y, \alpha) \in E \times \overline{\mathbb{R}}, \quad b_{(y, \alpha)} \leq f\}, \quad (9)$$

where \bigvee denotes the supremum. Therefore, in the product space $E \times \overline{\mathbb{R}}$ the subgraph of the opening is generated by the upper envelope of the horizontally and vertically translated shape function $b(x - y) + \alpha$ under the function f . In other words, function $(f \circ b)(x)$ can be seen as the supremum of the invariants parts of f under-swept by b . Regarding the closing $(f \bullet b)(x)$, a similar geometric dual interpretation is obtained:

$$\varphi_b(f) = \bigwedge \{\check{b}_{(y, \alpha)} \mid (y, \alpha) \in E \times \overline{\mathbb{R}}, \quad \check{b}_{(y, \alpha)} \geq f\}, \quad (10)$$

where \bigwedge denotes the infimum and $\check{b}(x) = -b(-x)$. This expression corresponds to the invariant parts of f over-swept by the horizontally and vertically symmetric structuring function \check{b} . From (9), it is straightforward to see that the opening is (i) increasing, (ii) idempotent and (iii) anti-extensive, i.e., $\forall x$, (i) $f(x) \leq g(x) \Rightarrow \gamma_b(f)(x) \leq \gamma_b(g)(x)$; (ii) $\gamma_b(\gamma_b(f)) = \gamma_b(f)$; and (iii) $\gamma_b(f)(x) \leq f(x)$. From (10), the closing is increasing and idempotent, but being extensive: $\varphi_b(f)(x) \geq f(x)$, $\forall x$. More complex filters can be obtained by composition of openings and closings [2, 3].

At this point, it could be interesting for a general reader to compare these morphological operators to the most extended family of filters based on the standard convolution of a function f by a translation-invariant kernel k :

$$(f * k)(x) = \int_E f(y)k(y - x)dy, \quad (11)$$

and in particular, to the case of canonical kernel in linear filtering, the so-called Gaussian kernel at scale t :

$$(f * g_t)(x) = C \int_E f(y) \exp\left(-\frac{\|x - y\|^2}{2t}\right) dy, \quad C = (2\pi t)^{-n/2}. \quad (12)$$

One can easily identify that the quadratic dilation (resp. erosion) is just a convolution in a max-plus (resp. min-minus) algebra instead of the plus-times algebra, and $p_t(x)$ is, up to the constant C , just the logarithm of $g_t(x)$. However, we point out that the parallelism with the quadratic opening is more relevant:

$$(f \circ p_t)(x) = \bigvee_{y \in E, \alpha \in \mathbb{R}} \left\{ -\frac{\|x - y\|^2}{2t} + \alpha : -\frac{\|x - y\|^2}{2t} + \alpha \leq f \right\}. \quad (13)$$

Thus, the standard regularization of the function by a Gaussian kernel weighted-average in $(f * g_t)$ is replaced in $(f \circ p_t)(x)$ by a maximal quadratic under-regularization, or an minimal over-regularization in $(f \bullet p_t)$.

The most commonly studied framework, which additionally presents better properties of invariance, is based on flat structuring functions, called structuring elements. More precisely, let B be a Boolean set defined at the origin, i.e., $B \subseteq E$ or $B \in \mathcal{P}(E)$, which defines the “shape” of the structuring element, the associated structuring function is given by

$$b(x) = \begin{cases} 0 & \text{if } x \in B, \\ -\infty & \text{if } x \in B^c, \end{cases} \quad (14)$$

where B^c is the complement set of B in $\mathcal{P}(E)$. Hence, the flat dilation $(f \oplus B)$ and flat erosion $(f \ominus B)$ can be computed respectively by the moving local maxima and minima filters, i.e.,

$$\begin{cases} \delta_B(f)(x) = (f \oplus B)(x) = \sup_{y \in B} \{f(x - y)\} = \bigvee_{y \in B} f(x - y), \\ \varepsilon_B(f)(x) = (f \ominus B)(x) = \inf_{y \in B} \{f(x + y)\} = \bigwedge_{y \in B} f(x + y). \end{cases} \quad (15)$$

A detailed presentation of the principles and applications of morphological image analysis is provided in [1]. Recently, in [11], the state of the art in mathematical morphology is exposed in a didactic fashion, with original and novel content.

Traditionally, structuring functions (resp. structuring elements) have been space translation-invariant, applying the function b (or the same set B , i.e., same shape and orientation) in all pixels of the image. In the last years, the notion of adaptive morphological operators [12] based on using adaptive structuring elements, which change their shape and orientation over the space E , according to the local image features, have been proposed. In [13] an overview of adaptive morphology is detailed, and in [14] a complementary overview is presented as well as the latest developments and a brief history of adaptive mathematical morphology.

As pointed out in [14], there are two important aspects of adaptive mathematical morphology to address: (1) how to construct adaptive structuring elements which are suitable for the image analysis task, and (2) how to properly define morphological operators with adaptive structuring elements. Among the methods of adaptive morphology, those based on an orientation vector field to adapt the shape and orientation of structuring elements show good ability to preserve the structures of image. The approach followed in this work for constructing the proposed adaptive morphological operators is therefore based on adaptivity with respect to “the spatial neighborhood position” or “gray level image values”, which is referred as input-adaptive mathematical morphology by Roerdink [12]. This category of adaptiveness is defined as adaptability with respect to the image content, i.e. the position in the image domain as well as values in the image range. Well founded examples of input-adaptive processing are those based on bilateral morphological operators [15].

There are several alternative formulations for adaptive morphological operators. Adaptive morphological operators can be defined using the notion of impulse functions [16], without explicit use of the adjunction property and then the morphological opening and closing are computed directly without resorting to compositions of the erosion and dilation, which corresponds just to spatially-variant counterpart of the opening (9). Here we adopt another formulation based on the composition of adjoint operators in a quite general setting and which is easily used in our case.

In this work, the adaptive structuring elements change their shape and orientation according to the edges of the objects contained in the image by means of an orientation vector field. The orientation vector field is defined in

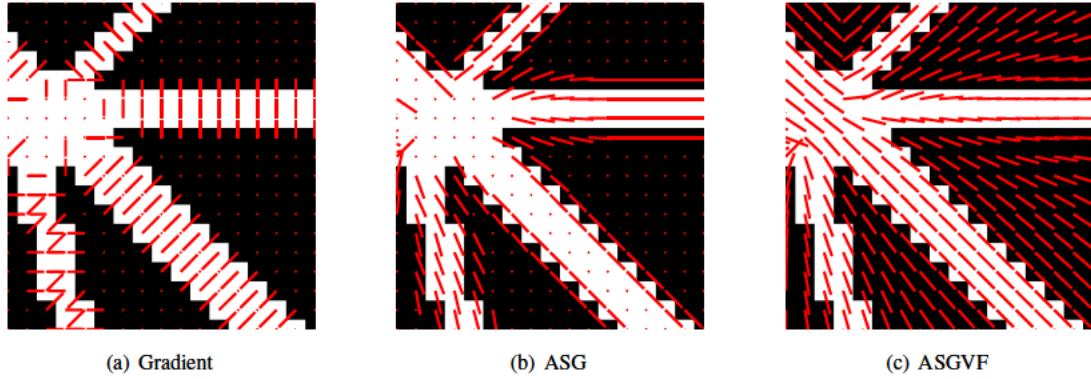


Figure 1: Single orientation vector fields (SOVF): a) image gradient, b) average squared gradient (ASG) [19], c) average squared gradient vector flow (ASGVF) [20].

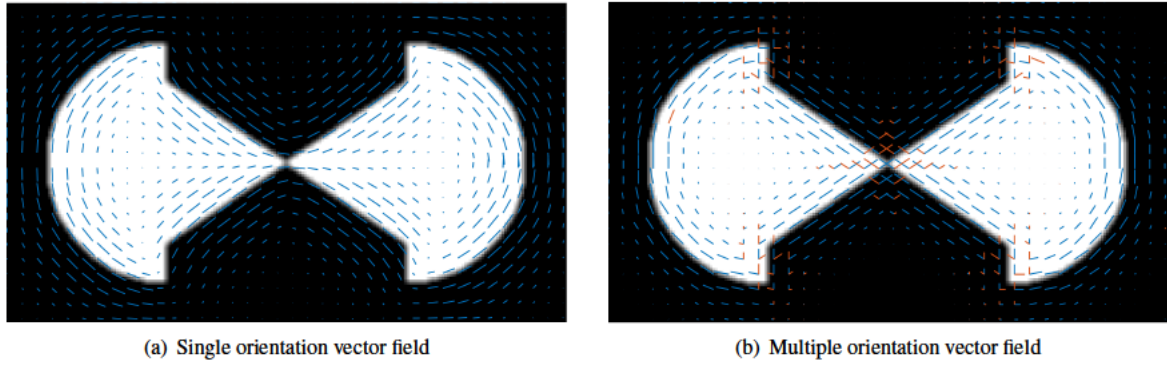


Figure 2: Comparison of orientation vector fields considering (a) a single orientation or (b) multiple orientations at each pixel. The single orientation vector field has been obtained by the ASGVF method [20] whereas the multiple orientation vector field has been obtained by the method described in Section 2.1.

all pixels of the image and can provide only one orientation at each pixel (single orientation estimation methods) or the main orientations existing at that pixel (multiple orientation estimation methods). The first group of methods shows excellent performance in scenarios where there is only one dominant orientation but does not consider that a pixel may have associated several predominant orientations, as crossing lines (X-junction), corners (L-junctions) and junctions (Y-junctions) [17]. These methods are usually based on the image gradient and provide the orientation by averaging its values. Some of these methods are, e.g., the local structure tensor (LST) [17], principal component analysis (PCA) [18], the average squared gradient (ASG) [19] and its regularization, the average squared gradient vector flow (ASGVF) [20]. For sake of clarity, some of them are shown in Fig.1. Note that the LST method, PCA method and the ASG method provide equivalent single orientation vector fields [21].

The second group of orientation estimation methods considers more than one orientation existing at each pixel. These methods are mainly based on a bank of filters, see, e.g. [22, 23, 24]. A visual comparison between single orientation and multiple orientation estimation method can be observed in Fig.2. It is important to note that the orientation provided by single orientation estimation methods is the local average of the orientations existing at each pixel of the image. On the other hand, multiple orientation estimation methods deal independently each one of the existing orientations, since these methods are more complex and can model this situation.

The aim of this paper is to provide adaptive morphological filters whose structuring elements are spatially-variant based on the information given by a multiple orientation vector field. To this end, the paper is organized as follows:

after this introduction, Section 2 contains the theoretical part of the paper. Firstly, in Section 2.1 the proposed framework to estimate multiple orientations is detailed. Then, in Section 2.2, spatially-variant morphological operators are formulated in the general case, and in Section 2.3, when flat adaptive structuring elements are used. Later, Section 2.4 addresses the definition of the spatially-variant adaptive structuring elements proposed in this work. We also formulate the corresponding metric structuring function and the Hamilton–Jacobi PDE associated to those operators. Results of the proposed filters are shown in Section 3, as well as the comparison with morphological bilateral operators and filters based on a single orientation vector field. Finally, Section 4 closes the paper with the conclusions.

2. Methodology

2.1. Multiple orientation estimation framework

The orientation vector field considered in this work is based on a decomposition of the information of the contours by a bank of orientated linear openings, as shown in Fig. 3. Let $f(x) : E \rightarrow \mathbb{R}$ be a gray-level image, where the support space is $E \subset \mathbb{Z}^2$ and the pixel coordinates are given by $x \in E$. The edges of the objects in $f(x)$ are provided in $g(x)$ by an edge detector method (e.g. thresholded gradient [25] or Canny method [26]).

The contours are then decomposed by means of a bank of filters. In our approach, these filters are directional openings $\gamma_{L^{\theta_i,l}}$ [1]. The directional opening of $g(x)$ by a linear and symmetric structuring element (SE) of length l and direction θ_i , $L^{\theta_i,l}$, is defined as the directional erosion of g by $L^{\theta_i,l}$ followed by the directional dilation with the same flat structuring element:

$$\gamma_{L^{\theta_i,l}}(g)(x) = \delta_{L^{\theta_i,l}}(\varepsilon_{L^{\theta_i,l}}(g))(x), \quad (16)$$

where the definitions of the directional erosion and dilation of f by $L^{\theta_i,l}$ are, respectively,

$$\varepsilon_{L^{\theta_i,l}}(f)(x) = \bigwedge_{h \in L^{\theta_i,l}} \{f(x+h)\}, \quad (17)$$

$$\delta_{L^{\theta_i,l}}(f)(x) = \bigvee_{h \in L^{\theta_i,l}} \{f(x-h)\}. \quad (18)$$

The proposed orientation model is based on a decomposition of the contour information by families of linear openings, $\{\gamma_{L^{\theta_i,l}}\}_{i \in I}$, according to a particular discretization of the orientation space $\{\theta_i\}_{i \in I}$. In the next step of the proposed method, a filtering is performed at each one of the directional openings (depicted as H_σ in Figure 3). The filtering extends the orientation information and reduces angle mismatches due to noise. The kernel H_σ is the sampling of a Gaussian low-pass filter, where σ is the spatial standard deviation of the filter.

Once the directional openings have been filtered, the directional signature at pixel x is defined as the gathering of all responses $\tilde{g}_{\theta_i}(x)$, i.e.,

$$s_{x,l}(i) = \tilde{g}_{\theta_i}(x), \quad (19)$$

providing at each pixel an unidimensional signal over the discrete angles θ_i . Then, in order to determine its peaks, $s_{x,l}(i)$ is interpolated using cubic b-splines [27]:

$$\hat{s}_{x,l}(\theta) = \sum_{i=1}^N s_{x,l}(i) b_3(\theta - \theta_i), \quad (20)$$

$\hat{s}_{x,l}(\theta)$ becoming a continuous and differentiable signal and θ being a continuous variable denoting the angle. Note that we are interested in the orientation of the contours and not in the direction, this is achieved by the symmetry of the orientated structuring elements used in the openings, consequently $\hat{s}_{x,l}(\theta)$ is a periodic signal, whose period is 180 degrees. The peaks of $\hat{s}_{x,l}(\theta)$ are found by searching the angles θ_p where the first derivative equals zero and checking that the second derivative is negative at these angles. Only those angles θ_p whose peak value is greater than a given threshold will be considered. These maxima correspond to the multiple orientations existing at pixel x . Finally, collecting all the orientations estimated at all the pixels in the image provides the multidimensional vector field $\vec{\theta}(x)$.

Figure 4 shows the images and signals involved in the multiple orientation estimation framework. In this visual example, the length of the orientated linear structuring element is $l = 9$. When dealing with discrete images, it is

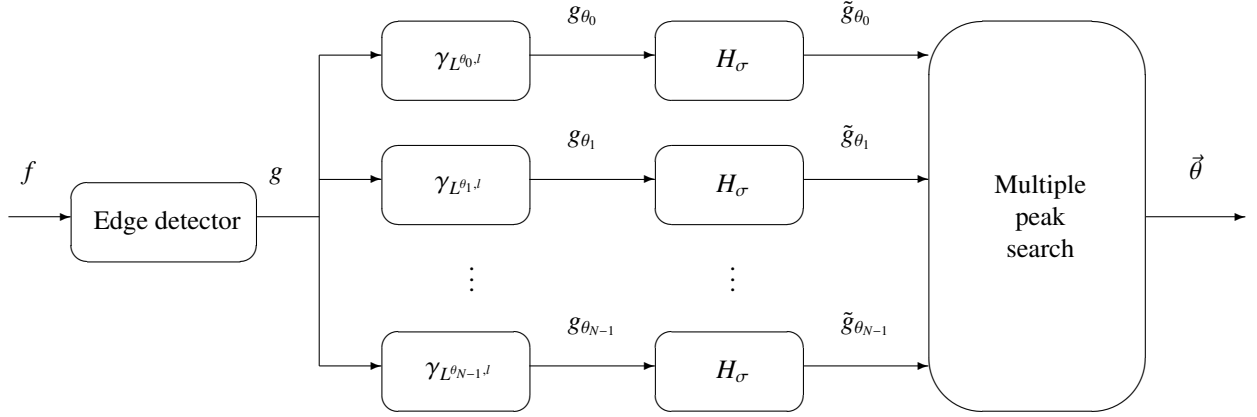


Figure 3: Block diagram of the multiple orientation estimation framework.

important to remember the effects of discretization. As described in [20], the angular resolution of a structuring element of length l is $\Delta_\theta = \frac{90}{l-1}$ degrees, therefore the angles that can be used are $\theta_i = i \Delta_\theta$, $i \in I = [0, N - 1]$, with $N = 2(l - 1)$. It is important to remark that a long structuring element allows for a larger angular resolution (i.e., more directions) but the structures to be detected have to be bigger. On the other hand, a smaller structuring element offers fewer directions but it allows get into small details in the image. In this example, the number of branches in the bank filter is $N = 16$, the angular resolution is $\Delta_\theta = 11.25$ degrees and the spatial standard deviation of the Gaussian low-pass filter is $\sigma = 5$. Fig. 4(z)-Fig.4(ab) show the directional signature for three selected pixels in Fig. 4(a), where the detected maxima in the directional signature correspond to the multiple orientations existing at those pixels.

2.2. Abstract formulation for spatially-variant morphological operators

As discussed above, morphological operators are classically defined for images supported on Euclidean spaces. Recent works have extended mathematical morphology for real valued images whose support space is a Riemannian manifold [28], or more generally, a length space [29, 30]. Let us introduce a formulation which is compatible with Euclidean, Riemannian and length-space settings as well as with the adaptive approach of structuring elements. This abstract setting is based on the theory max-plus mathematics (also known as idempotent analysis [31, 32, 33]).

Metric Maslov measure space. The theoretical foundations of Maslov idempotent measure theory [32] are based on replacing in the structural axioms of probability theory the role of the classical semiring $S_{(+, \times)} = (\mathbb{R}_+, +, \times, 0, 1, \leq)$ of positive real numbers by the idempotent semiring: $S_{(\max, +)} = (\bar{\mathbb{R}}, \max, +, -\infty, 0, \leq)$. In this context, a change of the measure involves a consistent counterpart to the standard probability theory.

Let (X, d) be a (Hausdorff topological) metric space and let m be a Maslov idempotent measure on X , i.e., mapping from X in the max-plus semiring such that for every function $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$, we have $A \subset X$,

$$m_f(A) = \sup_{x \in A} f(x). \quad (21)$$

The triple (X, d, m) is called a metric Maslov measure space.

Admissible structuring function. A Maslov idempotent measurable function $b : X \times X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ defined in (X, d, m) is said to be an admissible structuring function if the following conditions are satisfied $\forall x, y \in X$,

- Nonpositivity and total mass inequality:

$$m(b(x, \cdot)) = \sup_{y \in X} b(x, y) \leq 0 \Leftrightarrow b(x, y) \leq 0. \quad (22)$$

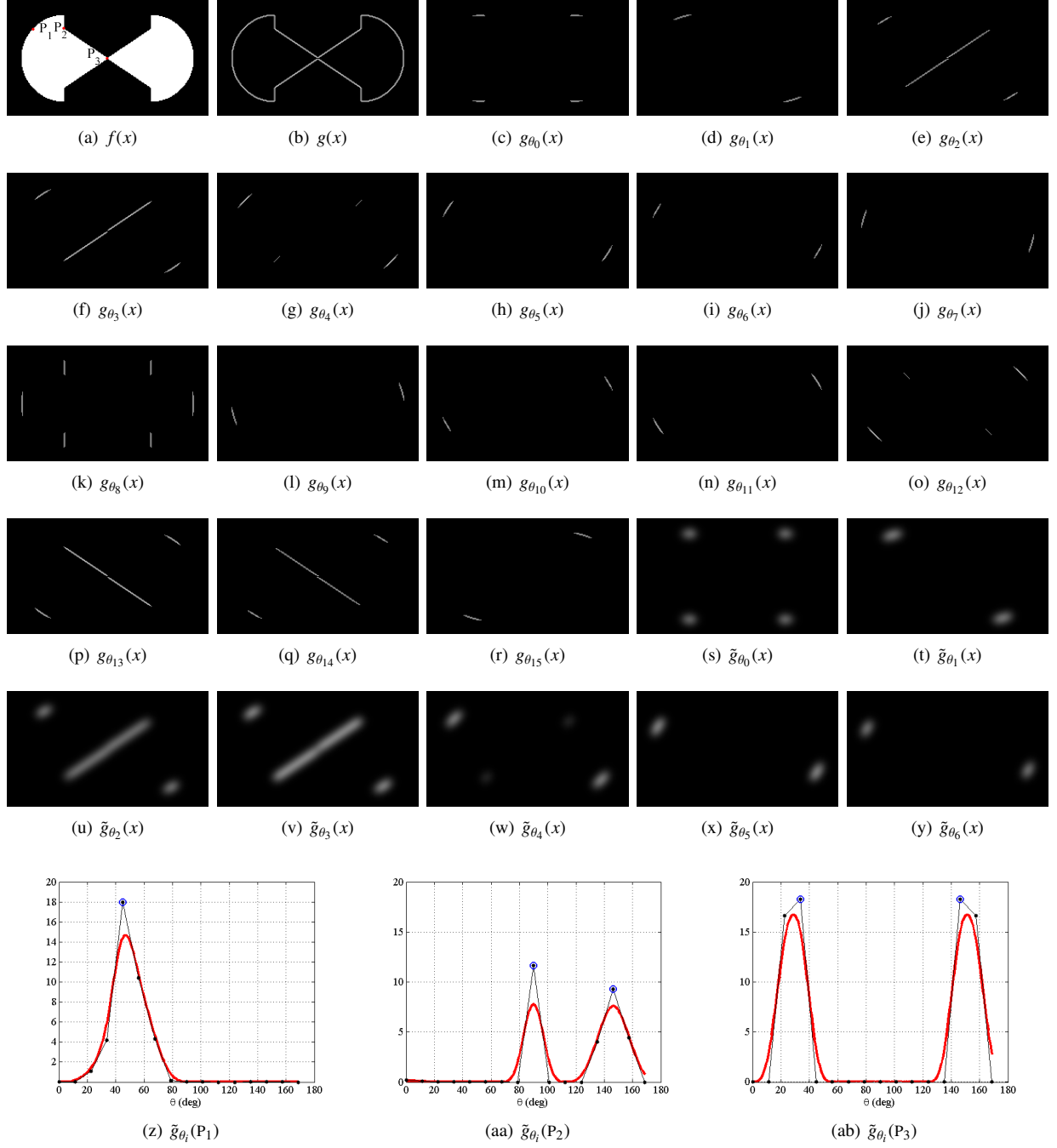


Figure 4: Estimation of the multiple orientation vector field. (a) Input image $f(x)$, (b) contours of the input image given by the absolute value of the gradient, Fig. 4(c) - Fig. 4(r) g_{θ_i} with the decomposition of the contours by directional openings using an orientated linear structuring element of length $l = 9$. The value of l determines the number of branches, $N = 16$, and the angular resolution, $\Delta_\theta = 11.25$ degrees. Fig. 4(s) - Fig. 4(y) show some of the low-pass filtered images \tilde{g}_{θ_i} for illustrative purposes. Fig. 4(z) - Fig. 4(ab) show the directional signature of three selected pixels P_1 , P_2 and P_3 depicted in Fig. 4(a) with a red dot. The values of $s_{P_j;l}(i)$, $j = [1, 2, 3]$, are plotted with dots whereas the interpolated signals $\hat{s}_{P_j;l}(\theta)$ are plotted with continuous red lines. The detected maxima, which correspond to the multiple orientations existing at those pixels, are depicted with blue circles. The threshold considered to decide if a peak is a maximum is the 50% of the maximum peak value.

- Completeness (or conservative):

$$m(b(x, x)) = 0 \Leftrightarrow b(x, x) = 0. \quad (23)$$

This axiomatic formulation of the notion of admissible structuring function provides us the minimal mathematical requirements to use the function in a pair of adjoint dilation and erosion. In fact, as the name implies, the two axioms are the counterpart of those of a heat kernel in a measure metric space.

Dilation and Erosion operators on (X, d, m) . We have now the ingredients to introduce the pair of dilation and erosion for any image f according to b . Given an admissible structuring function $b(x, y)$ in (X, d, m) , the dilation and erosion of a function $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ by b are given respectively by

$$\delta_b(f)(x) = \sup_{y \in X} \{f(y) + b(x, y)\}, \quad (24)$$

$$\varepsilon_b(f)(x) = \inf_{y \in X} \{f(y) - b(y, x)\}. \quad (25)$$

Both operators are increasing. In addition, the non-positivity and completeness of $b(x, y)$ imply that the dilation is extensive and commutes with supremum, and the erosion is anti-extensive and commutes with the infimum, i.e., for a family of functions $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$, $i \in I$, and any admissible structuring function, one has $\forall x \in X$

$$\begin{aligned} f_i(x) &\leq \delta_b(f_i)(x); \quad \text{and} \quad \delta_b\left(\bigvee_i f_i\right)(x) = \bigvee_i \delta_b(f_i)(x), \\ f_i(x) &\geq \varepsilon_b(f_i)(x); \quad \text{and} \quad \varepsilon_b\left(\bigwedge_i f_i\right)(x) = \bigwedge_i \varepsilon_b(f_i)(x). \end{aligned}$$

The previous properties are naturally required for any dilation and erosion, even if they are unrelated between them. In addition, we can easily check that the pair $(\varepsilon_b, \delta_b)$, defined with the convention of change of sign in the convolution and symmetric admissible structuring function,

- are dual by involution, i.e., for any function $f(x)$ and $\forall x \in X$, one has that

$$\delta_b(f)(x) = -\varepsilon_b(-f)(x);$$

- forms an adjunction, i.e., for any two functions f and g on (X, d, m) , the pair $(\varepsilon_b, \delta_b)$ satisfy that $\forall x \in X$

$$\delta_b(f)(x) \leq g(x) \Leftrightarrow f(x) \leq \varepsilon_b(g)(x).$$

Consequently, their composition leads to the opening and closing of f according to the admissible structuring function b , given respectively by:

$$\gamma_b(f)(x) = \delta_b \circ \varepsilon_b(f)(x) = \sup_{z \in X} \inf_{y \in X} \{f(y) - b(y, z) + b(z, x)\}, \quad (26)$$

$$\varphi_b(f)(x) = \varepsilon_b \circ \delta_b(f)(x) = \inf_{z \in X} \sup_{y \in X} \{f(y) + b(z, y) - b(x, z)\}. \quad (27)$$

More precisely, their construction by adjunction property involves that the opening (26) (resp. the closing (27)) can be again rewritten as a maximal lower envelope of structuring functions (resp. minimal upper envelope of negative symmetric structuring functions), i.e.,

$$\gamma_b(f) = \bigvee \{b(x, y) + \alpha \mid (x, y, \alpha) \in X \times X \times \overline{\mathbb{R}}, \quad b(x, y) + \alpha \leq f\}, \quad (28)$$

$$\varphi_b(f) = \bigwedge \{-b(y, x) + \alpha \mid (x, y, \alpha) \in X \times X \times \overline{\mathbb{R}}, \quad -b(y, x) + \alpha \geq f\}, \quad (29)$$

and therefore they are increasing idempotent and anti-extensive (resp. extensive) operators. Remarkably, the symmetry of the admissible structuring function is not a necessary condition for the adjunction. Nevertheless, in the case of symmetry, i.e., $b(x, y) = b(y, x)$, the formulation is obviously simplified.

2.3. Adaptive flat morphological operators

In the case of adaptive flat morphological operators in the Euclidean space E , the admissible structuring function $b(x, y)$ is associated to a space-variant adaptive structuring element, denoted by $\mathcal{A}(x)$. The mapping \mathcal{A} assigns a possibly different subset of E to each point x of space E according to local features of the image, such that the corresponding admissible structuring function is defined as

$$b(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{if } y \in \mathcal{A}(x), \\ -\infty & \text{if } y \in \mathcal{A}^c(x). \end{cases} \quad (30)$$

Expressions of operators (24) and (25) are therefore simplified to obtain the adaptive flat dilation and erosion of f by $\mathcal{A}(x)$ as follows:

$$\delta_{\mathcal{A}(x)}(f)(x) = \bigvee_{y \in \mathcal{A}^T(x)} f(y), \quad (31)$$

$$\varepsilon_{\mathcal{A}(x)}(f)(x) = \bigwedge_{y \in \mathcal{A}(x)} f(y). \quad (32)$$

where the transposed set $\mathcal{A}^T(x)$ is defined by the relationship

$$y \in \mathcal{A}^T(x) \iff x \in \mathcal{A}(y), \quad (33)$$

or using the admissible structuring function:

$$y \in \mathcal{A}^T(x) \text{ if } b(y, x) = 0.$$

The operators $\delta_{\mathcal{A}(x)}$ and $\varepsilon_{\mathcal{A}(x)}$ are adjunct once the same structuring element mapping $\mathcal{A}(x)$ is used [12]. Hence, the adaptive flat opening and closing can be defined, respectively, as

$$\gamma_{\mathcal{A}(x)}(f) = (\delta_{\mathcal{A}(x)} \circ \varepsilon_{\mathcal{A}(x)})(f) = \bigvee \{ \text{Cyl}_{\alpha}(x) \mid \text{Cyl}_{\alpha}(x) \leq f \}, \quad (34)$$

$$\varphi_{\mathcal{A}(x)}(f) = (\varepsilon_{\mathcal{A}(x)} \circ \delta_{\mathcal{A}(x)})(f) = \bigwedge \{ \text{Cyl}_{\alpha}^T(x) \mid \text{Cyl}_{\alpha}^T(x) \geq f \}, \quad (35)$$

where $\text{Cyl}_{\alpha}(x)$ is a cylinder of base $\mathcal{A}(x)$ and height α and $\text{Cyl}_{\alpha}^T(x)$ is the complement of a cylinder of base $\mathcal{A}^T(x)$ and height α . In addition, the adjunction property allows us to make up more complex filters by means of combining adaptive openings and closings, providing for instance sequential filters, which have shown excellent results to restore images corrupted by dark and bright artefacts [1]. More precisely, in this paper we used the adaptive close-open filter, i.e.,

$$CO_{\mathcal{A}(x)}(f)(x) = (\varphi_{\mathcal{A}(x)} \circ \gamma_{\mathcal{A}(x)})(f)(x), \quad (36)$$

and the open-close filter, i.e.,

$$OC_{\mathcal{A}(x)}(f)(x) = (\gamma_{\mathcal{A}(x)} \circ \varphi_{\mathcal{A}(x)})(f)(x), \quad (37)$$

which remove small structures while keeping sharp edges of the remaining ones. It is important to remember that the adaptive structuring elements \mathcal{A} are computed in a way that near the edges of structures the image is filtered preserving these edges and minimizing inter-region filtering whereas far from the edges the structuring elements are designed to maximize the intra-region filtering.

2.4. Sets of ellipses as adaptive structuring elements

Let us focus on two-dimensional images: $E \subset \mathbb{R}^2$. We consider in this study an elliptical shape kernel $\mathcal{E}^{\theta, a, b}$ to be used by the proposed spatially-variant adaptive filters. In the case of orientation vector fields that take into account only a single orientation at each pixel, the multiscale structuring element is defined as

$$\mathcal{A}_t(x) = \mathcal{E}^{\theta(x), a_t(x), b_t(x)}, \quad (38)$$

where $\theta(x)$, $a_t(x)$ and $b_t(x)$ are, respectively, the orientation, major semi-axis and minor semi-axis of the ellipse $\mathcal{E}^{\theta,a,b}$ centered at pixel x . The value of $\theta(x)$ is given by the orientation vector field, whereas the values of $a_t(x)$ and $b_t(x)$ can be provided by the absolute value of this vector field or also by the distance to the nearest edge, and a scale parameter t , which is typically related to the size of the semi-axis.

In the case of considering a multiple orientation vector field, the adaptive multi-scale structuring element at pixel x is given by the set union of multiple ellipses of same shape/size

$$\mathcal{A}_t(x) = \bigcup_{1 \leq i \leq M_x} \mathcal{E}^{\theta_i(x), a_t(x), b_t(x)}, \quad (39)$$

where $\theta_i(x)$ corresponds to each one of the M_x detected orientations at pixel x . Fig. 5 shows an example of an image with structuring elements at some pixels according to previous definitions. In Fig. 5(a) the elliptical structuring elements are provided using the single orientation vector field of Fig.2(a), whereas Fig. 5(b) shows the multiple-elliptical structuring elements considering the proposed multiple orientation vector field (shown in Fig.2(b)).

From the viewpoint of implementation, it is easy to see that the dilation and the erosion by the proposed adaptive structuring elements as the union of a set of ellipses can be computed in parallel for each ellipse and then, combined by supremum or infimum, i.e., from (39),

$$\delta_{\mathcal{A}_t(x)}(f)(x) = \delta_{\bigcup_{i \in M} \mathcal{E}^{\theta_i(x), a_t(x), b_t(x)}}(f)(x) = \bigvee_i \delta_{\mathcal{E}^{\theta_i(x), a_t(x), b_t(x)}}(f)(x), \quad (40)$$

$$\varepsilon_{\mathcal{A}_t(x)}(f)(x) = \varepsilon_{\bigcup_{i \in M} \mathcal{E}^{\theta_i(x), a_t(x), b_t(x)}}(f)(x) = \bigwedge_i \varepsilon_{\mathcal{E}^{\theta_i(x), a_t(x), b_t(x)}}(f)(x). \quad (41)$$

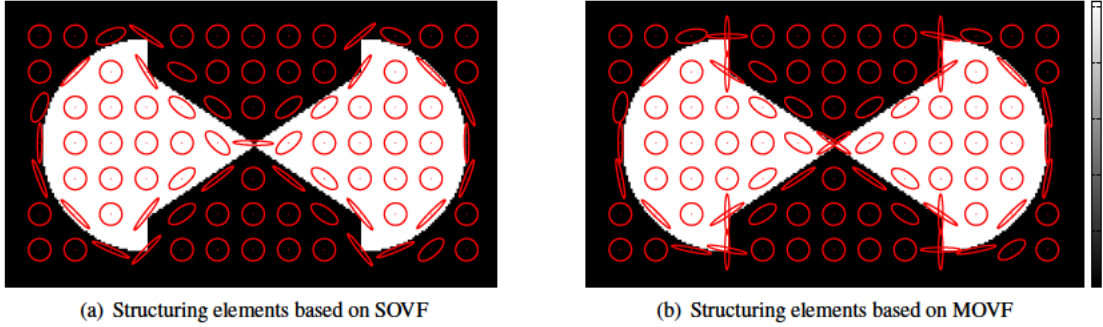


Figure 5: Comparison of the elliptical structuring elements $\mathcal{A}_t(x)$ provided by the single orientation vector field (SOVF) of Fig.2(a), and the elliptical structuring elements $\mathcal{A}_t(x)$ provided by the multiple orientation vector field (MОВF) of Fig. 5(b).

2.5. Elliptical structuring functions and metric Hamilton–Jacobi PDE

The previous flat adaptive morphological operators can be related to a family of structuring functions and more theoretically to a metric partial differential equation. The goal of this part is to outline such a preliminary framework which will be developed in ongoing work.

Let us initially write the centered ellipse \mathcal{E} in \mathbb{R}^2 as the quadratic form

$$\mathcal{E} = \{x : x^T S x \leq 1\}, \quad (42)$$

where $x \in \mathbb{R}^2$ is the vector referring the coordinate axes and S is a symmetric positive definite 2×2 matrix, which can be seen as the shape matrix. More precisely, the eigenvalues of S , $\lambda_1 \geq \lambda_2$, are related to the semi-minor and semi-major axes of the ellipse:

$$a = \lambda_2^{-1/2}, \quad b = \lambda_1^{-1/2}; \quad (43)$$

and the angle of the first eigenvector with axis x corresponds to θ in our notation. The ellipse centered at point y is just given by $\{x : (x - y)^T \mathbf{S}(x - y) \leq 1\}$. The reader can easily identify the expression of the squared anisotropic Euclidean distance, well known in statistics as the Mahalanobis distance [34]:

$$d_{\Sigma}(x, y) = \sqrt{(x - y)^T \Sigma^{-1}(x - y)}, \quad (44)$$

where the covariance matrix is the inverse of the elliptical shape matrix, i.e., $\Sigma = \mathbf{S}^{-1}$. In other words, each ellipse will provide an anisotropic metric which can be then used similarly to the Euclidean distance in the parabolic structuring function $p_t(x)$. Thus, we introduce the multiscale anisotropic quadratic structuring function of shape Σ as:

$$p_{t, \Sigma}(x) = -\frac{1}{2t} x^T \Sigma^{-1} x. \quad (45)$$

Because $E \subset \mathbb{R}^2$ endowed with the metric distance d_{Σ} is a length space, we may straightforwardly use the theory of morphological PDE on length spaces [29] to this spatially-invariant anisotropic case. First, we introduce the metric subgradient of f at x defined as

$$|\nabla^- f|(x) = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{[f(y) - f(x)]_-}{d_{\Sigma}(x, y)} = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{[f(x) - f(y)]_+}{d_{\Sigma}(x, y)}, \quad (46)$$

where $a_+ = \max(a, 0)$ and $a_- = \max(-a, 0)$. The expression $|\nabla^- f|(x)$ is called descending slope since it measures the downward pointing component of f near x : local variation of f taking into account only values less than $f(x)$. Second, we set the morphological PDE on the metric space (E, d_{Σ}) as the following initial-value Hamilton–Jacobi first-order equation:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \pm \frac{1}{2} |\nabla^- u(x, t)|^2 = 0, & \text{in } E \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = f(x), & \text{in } E, \end{cases} \quad (47)$$

where the initial condition $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ is a continuous bounded function. Then, the semigroup solutions of (47) are given by the metric Hopf–Lax–Oleinik formulas [29]:

$$u(x, t) = \sup_{y \in E} \left\{ f(y) - \frac{d_{\Sigma}^2(x, y)}{2t} \right\} = (f \oplus p_{t, \Sigma})(x) \quad (\text{for } - \text{ sign}), \quad (48)$$

$$u(x, t) = \inf_{y \in E} \left\{ f(y) + \frac{d_{\Sigma}^2(x, y)}{2t} \right\} = (f \ominus p_{t, \Sigma})(x) \quad (\text{for } + \text{ sign}). \quad (49)$$

Coming back to our spatially-variant framework, each ellipse i at x involves a scaled local metric associated to the shape matrix $\mathbf{S}(i; x)$:

$$\mathcal{E}^{\theta_i(x), a_i(x), b_i(x)} \mapsto \frac{1}{2t} \mathbf{S}(i; x),$$

in such a way that, associated to the set of ellipses at point x , we can introduce the following admissible structuring function:

$$p_t(x, y) = -\frac{1}{2t} \sum_{i=1}^{M_x} (x - y)^T \mathbf{S}(i; x) (x - y). \quad (50)$$

Function $p_t(x, y)$ is the counterpart of the flat set $\mathcal{A}_t(x)$ given in (39). Using this admissible structuring function (50), the corresponding adaptive dilation and erosion:

$$\delta_{p_t}(f)(x) = \sup_{y \in X} \left\{ f(y) - \frac{1}{2t} \sum_{i=1}^{M_x} (x - y)^T \mathbf{S}(i; x) (x - y) \right\}, \quad (51)$$

$$\varepsilon_{p_t}(f)(x) = \inf_{y \in X} \left\{ f(y) - \frac{1}{2t} \sum_{i=1}^{M_y} (y - x)^T \mathbf{S}(i; y) (y - x) \right\}, \quad (52)$$

lead to anisotropic multiple orientation unflat operators that behave more regularly than the flat ones. In comparison to the spatially-invariant anisotropic case, since at each x the metric is different, i.e., $\mathbf{S}(i; x) \neq \mathbf{S}(i; y)$, the term $(x - y)^T \mathbf{S}(i; x)(x - y)$ lacks of symmetry and therefore does not lead to a distance between x and y . We can nevertheless introduce a local pseudo-metric gradient:

$$|\nabla_x^- f|(x) = \limsup_{y \rightarrow x} \frac{[f(y) - f(x)]_-}{\left(\sum_{i=1}^{M_x} (x - y)^T \mathbf{S}(i; x)(x - y)\right)^{1/2}}, \quad (53)$$

which can be used to formulate the following inhomogeneous initial-value first-order differential equation problem:

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) \pm \frac{1}{2} |\nabla_x^- u(x, t)|^2 = 0, & \text{in } E \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = f(x), & \text{in } E. \end{cases} \quad (54)$$

There is not a viscous solution of (54) under the form of an analytic expression. However, we conjecture that an appropriate numerical solution of this PDE model can provide significant results.

3. Results

In this section, the proposed spatially-variant adaptive filters based on a multiple orientation vector field (MOVf) are compared to spatially-invariant morphological filters, spatially-variant adaptive filters based on single orientation vector field (SOVf) and adaptive bilateral morphological filters. In order to provide a fair comparison, the different operators are applied to synthetic and real images in several application scenarios.

3.1. Spatially-invariant operators vs spatially-variant operators

Firstly, in order to show the advantages of spatially-variant morphological filters, the spatially-invariant morphological filters are compared to their respective spatially-variant counterparts considering a single orientation vector field (given by the ASGVF [20]) and the multiple orientation vector field described in Section 2.1. The input image used in this comparison is a 256×400 grey level chequerboard pattern. For the spatially-invariant operators, the structuring element b is a disk of 11 pixel of diameter, whereas for the spatially-variant operators the structuring elements $\mathcal{A}(x)$ are based on ellipses which change their shape and orientation according to the orientation vector field. Specifically, the elliptical adaptive structuring elements $\mathcal{E}^{\theta(x), a(x), b(x)}$ are designed as follows: the major semi-axis is $a = 11$ pixels long and the minor semi-axis is $b = 1$ pixel long near the edges and the elliptical structuring elements change gradually their eccentricity until both semi-axes are 6 pixels long in homogeneous areas far from the edges. On the other hand, the operators based on the multiple orientation vector field use the same elliptical function but the adaptive structuring elements are formed by the union of M single orientated ellipses, where M is the number of main orientations detected at each pixel.

Fig.6 displays the spatially-invariant erosion, dilation, opening and closing as well as the spatially-variant counterparts provided by a single and a multiple orientation vector field. The first row shows some structuring elements which are orientated according to the respective vector fields. Fig.6(d)-(f) show the erosion obtained by each structuring element (invariant, based on a single orientation and based on multiple orientations). Fig.6(g)-(i) show the analogue results for dilation. Fig. 6(j)-(l) and Fig. 6(m)-(o) show, respectively, the openings and closings. According to the results, the spatially-invariant operators can not preserve the image structures since the structuring elements always keep the same shape and orientation. The spatially-variant operators based on a single orientation show good results preserving the contours with only one associated orientation but these operators fail when the contours possess multiple orientation like corners or bifurcations. Finally, the spatially-variant operators based on the multiple orientation vector field preserve the image structures in corners, crossing lines and junctions better than operators based on a single orientation because the structuring elements can adapt to these situations with multiple orientations.

		PSNR(dB)	SSIM(%)
	Input Noisy image	18.23	68.75
Close-Open filter: $CO_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$	SOVF	18.41	63.59
	Bilateral	18.30	63.50
	Proposed MOVF	20.91	77.42
	SOVF	20.14	67.07
Open-Close filter: $OC_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$	Bilateral	20.20	70.11
	Proposed MOVF	21.39	76.66
	SOVF	20.72	70.38
AAF: $\Xi_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$	Bilateral	20.94	71.84
	Proposed MOVF	22.48	80.66

Table 1: Quantitative analysis in term of PSNR [40] and SSIM [41] of the visual outcomes in Fig. 7 considering Gaussian noise. This analysis compares adaptive morphological filters based on a single orientation vector fields (SOVF), morphological bilateral filters and adaptive morphological filters based on a multiple orientation vector field (MOVF).

3.2. Spatially-variant morphology in denoising applications

In this comparison, the spatially-variant operators are studied in a denoising application. The aim is to evaluate the ability of these operators to reduce the noise while preserving the image contours. The spatially-variant approaches used in this comparison are: spatially-variant operators using the local structure tensor (LST) [35], spatially-variant operators based on the multiple orientation vector field (MOVF) as was obtained in Section 2.1, and adaptive morphological bilateral filters [15]. The structuring elements used by the operators based on LST and MOVF are the same that were used in the previous comparison. The bilateral approach uses a structuring element based on a disk of 11 pixel of diameter. The filters evaluated are the adaptive sequential morphological filter formed by a closing followed by an opening $CO_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$, the adaptive sequential filter formed by a opening followed by an closing $OC_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$ and the average of the previous operators, the averaged alternate filter (AAF), $\Xi_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$, which presents skilful properties to remove Gaussian and impulsive noise [36]. These filters use predefined shapes as structuring elements unlike other methods, as i.e. general adaptive neighbourhoods [37] or morphological amoebas [38], which impose less restrictions on the shape of the structuring elements. Note that the proposed filters for image denoising are non iterative, unlike, e.g. anisotropic diffusion [39], based on the iterative approximation of the solution of a PDE.

Figure 7 shows the visual outcomes of this comparison in a scenario with Gaussian noise. The input image is a 194×152 real image of a building corrupted with Gaussian noise whose variance is $\sigma = 0.01$. Numerical results of this comparison have been gathered in Table 1 in terms of the peak signal-to-noise ratio (PSNR) (see, e.g. [40]) and the structural similarity index (SSIM) [41]. As can be seen, the proposed adaptive filters based on a multiple orientation vector field achieve the best results reducing the image noise while preserving the contours with multiple orientations compared to the space-variant filters based on a single orientation vector field and the morphological bilateral operators. The key of this improvement is the use of a combination of elliptical structuring elements according to the multiple orientations of the image structures.

Figure 8 shows the comparison of spatially-variant operators in a scenario with impulsive noise. The input image is the same as in the previous case, but now the 5% of its pixels has been corrupted by impulsive noise. Table 2 gathers the numerical results in terms of PSNR and SSIM. Once again, the filters based on MOVF provide the best results since the structuring elements based on multiple orientations can adapt their shape much better to the existing edges. As can be seen, the bilateral filters show the poorest results removing impulsive noise.

3.3. Study of the influence of the size of structuring elements on spatially-variant operators

One of the most interesting applications of spatially-variant filters consists in using orientated structuring elements to erode, dilate, remove or link only the image structures with a particular orientation feature. An example of this idea can be found in Figure 9, where orientated closings of different sizes have been used to link elongates structures of a cell image. In addition, the results are compared to invariant and bilateral closings in order to illustrate the advantages of the spatially-variant operator based on the orientations in this kind of applications.

		PSNR(dB)	SSIM(%)
	Input Noisy image	19.01	70.42
Close-Open filter: $CO_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$	SOVF	18.75	70.13
	Bilateral	18.88	65.50
	Proposed MOVF	19.52	77.73
	SOVF	19.07	73.33
Open-Close filter: $OC_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$	Bilateral	28.20	65.11
	Proposed MOVF	19.92	79.37
	SOVF	21.85	74.94
AAF: $\Xi_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$	Bilateral	20.94	71.84
	Proposed MOVF	22.96	81.45

Table 2: Quantitative analysis in term of PSNR [40] and SSIM [41] of the visual outcomes in Fig. 8 considering impulsive noise. This analysis compares adaptive morphological filters based on a single orientation vector fields (SOVF), morphological bilateral filters and adaptive morphological filters based on a multiple orientation vector field (MOVF).

The first row of Figure 9 shows an invariant closing with circular structuring elements of $r = 6$ pixels of radius, a bilateral closing based on circular structuring elements of $r = 6$ pixels of radius and a spatially-variant closing based on MOVF with elliptical structuring element of $a = b = 6$ pixels of major and minor semi-axis in homogeneous areas and $a = 6$ pixel of major semi-axis and $b = 2$ pixel of minor semi-axis near the image structures. The second row shows an invariant closing and a bilateral closing with circular structuring elements of $r = 12$ pixels and an orientated closing with elliptical structuring elements of $a = b = 12$ pixels in homogeneous areas and $a = 12, b = 2$ in pixels belonging to the image structures. Finally, the third row displays invariant and bilateral closings with circular structuring elements of $r = 18$ pixels and an orientated closing with elliptical structuring elements of $a = b = 18$ pixels in homogeneous areas and $a = 18, b = 2$ in image structures. As observed in Fig.9, the invariant and bilateral openings can not adapt to the image contours yielding deformations in the elongated structures. On the other hand, the closing based on MOVF can adapt much better to the elongated objects preserving the structures and removing the discontinuities.

4. Conclusions

This work has presented a novel formulation and implementation of adaptive spatially-variant morphological filters. The proposed filters use a multiple orientation vector field to adapt the shape and orientation of the structuring elements to the image structures. The numerical and visual outcomes show the excellent performances of the proposed filters and illustrate the ability of the proposed spatially-variant filters to reduce artefacts and noise in images while the main structures with multiple orientation (e.g. bifurcation, crossover or junctions) are preserved.

References

- [1] P. Soille, Morphological Image Analysis: Principles and Applications, 2nd Edition, Springer-Verlag, 2003.
- [2] J. Serra, Image Analysis and Mathematical Morphology: Theoretical Advances, Vol. II, Academic Press, London, 1988.
- [3] H. Heijmans, Morphological Image Operators, Advances in electronics and electron physics: Supplements, Academic Press, 1994.
- [4] P. Maragos, Slope transforms: theory and application to nonlinear signal processing, IEEE Transactions on Signal Processing 43 (4) (1995) 864–877. doi:10.1109/78.376839.
- [5] R. van den Boomgaard, L. Dorst, Gaussian Scale-Space Theory, Springer Netherlands, 1997, Ch. The Morphological Equivalent of Gaussian Scale-Space, pp. 203–220.
- [6] L. Alvarez, F. Guichard, P. L. Lions, J. M. Morel, Axioms and fundamental equations of image processing, Archive for Rational Mechanics and Analysis 123 (3) (1993) 199–257.
- [7] P. Maragos, Differential morphology and image processing, IEEE Trans. Image Processing 5 (6) (1996) 922–937. doi:10.1109/83.503909.
- [8] M. G. Crandall, H. Ishii, P.-L. Lions, User’s guide to viscosity solutions of second order partial differential equations, Bulletin of the American Mathematical Society 27 (1) (1992) 1–67.
- [9] E. Barron, R. Jensen, W. Liu, Hopf–lax–type formula for $u_t + h(u, du) = 0$, Journal of Differential Equations 126 (1) (1996) 48 – 61.

- [10] E. H. Diop, J. Angulo, Multiscale image analysis based on robust and adaptive morphological scale-spaces, *Image Analysis and Stereology* 34 (1) (2014) 39–50. doi:10.5566/ias.993.
- [11] L. Najman, H. Talbot (Eds.), *Mathematical Morphology: From Theory to Applications*, John Wiley & Sons, Inc., Hoboken, NJ, USA, 2013.
- [12] J. Roerdink, Adaptivity and group invariance in mathematical morphology, in: *Image Processing (ICIP), 2009 16th IEEE International Conference on*, 2009, pp. 2253–2256. doi:10.1109/ICIP.2009.5413983.
- [13] P. Maragos, C. Vachier, Overview of adaptive morphology: Trends and perspectives, in: *Image Processing (ICIP), 2009 16th IEEE International Conference on*, 2009, pp. 2241–2244. doi:10.1109/ICIP.2009.5413961.
- [14] V. Čurić, A. Landström, M. J. Thurley, C. L. L. Hendriks, Adaptive mathematical morphology – a survey of the field, *Pattern Recognition Letters* 47 (0) (2014) 18 – 28. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.patrec.2014.02.022.
- [15] J. Angulo, Morphological bilateral filtering, *SIAM Journal on Imaging Sciences* 6 (3) (2013) 1790–1822.
- [16] R. Verdú-Monedero, J. Angulo, J. Serra, Anisotropic morphological filters with spatially-variant structuring elements based on image-dependent gradient fields, *IEEE Trans. Image Processing* 20 (1) (2011) 200–212.
- [17] H. Knutsson, Representing local structure using tensors, *Proc. of the 6th Scandinavian Conference of Image Analysis* (1989) 244–251.
- [18] K. Mardia, P. Jupp, *Directional Statistics*, Wiley Series in Probability and Statistics, Wiley, 2009.
- [19] M. Kass, A. Witkin, Analyzing oriented patterns, *Comput. Vision Graph. Image Process.* 37 (3) (1987) 362–385.
- [20] R. Verdú-Monedero, J. Angulo, Spatially-variant directional mathematical morphology operators based on a diffused average squared gradient field, *Lecture Notes in Computer Science: Advanced Concepts for Intelligent Vision Systems* 5259 (2008) 542–553.
- [21] B. Rieger, L. J. van Vliet, A systematic approach to nd orientation representation, *Image and Vision Computing* 22 (6) (2004) 453 – 459.
- [22] P. Perona, Deformable kernels for early vision, *IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence* 17 (1991) 488–499.
- [23] J. Bigün, J. M. H. du Buf, N-folded symmetries by complex moments in gabor space and their application to unsupervised texture segmentation., *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 16 (1) (1994) 80–87.
- [24] E. P. Simoncelli, H. Farid, Steerable wedge filters for local orientation analysis., *IEEE Transactions on Image Processing* 5 (9) (1996) 1377–1382.
- [25] R. C. Gonzalez, R. E. Woods, *Digital Image Processing* (3rd Edition), Prentice-Hall, Inc., Upper Saddle River, NJ, USA, 2006.
- [26] J. Canny, A computational approach to edge detection, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* 8 (6) (1986) 679–698. doi:10.1109/TPAMI.1986.4767851.
- [27] M. Unser, A. Aldroubi, M. Eden, B-spline signal processing: Part I - Theory; Part II - Efficient design and applications, *IEEE Trans. Signal Processing* 41 (2) (1993) 821–848.
- [28] J. Angulo, S. Velasco-Forero, Riemannian mathematical morphology, *Pattern Recognition Letters* 47 (2014) 93–101.
- [29] J. Angulo, *Proc. of the ISMM’15, 15th International Symposium on Mathematical Morphology and Its Applications to Signal and Image Processing*, Springer International Publishing, 2015, Ch. Morphological PDE and Dilation/Erosion Semigroups on Length Spaces, pp. 509–521.
- [30] J. Angulo, *Proc. of the 5th Int. Conf. on Scale Space and Variational Methods in Computer Vision*, Springer International Publishing, 2015, Ch. Morphological Scale-Space Operators for Images Supported on Point Clouds, pp. 78–89.
- [31] V. Maslov, *Méthodes opératorielles*, MIR, 1987.
- [32] P. D. Moral, *Idempotent Analysis and Its Applications*, Vol. 401 of *Mathematics and Its Applications*, Springer Netherlands, 1997, Ch. Maslov Optimization Theory: Optimality versus Randomness, pp. 243–302.
- [33] G. L. Litvinov, V. P. Maslov, G. B. Shpiz, Idempotent functional analysis: An algebraic approach, *Mathematical Notes* 69 (5) (2001) 696–729.
- [34] P. C. Mahalanobis, On the generalised distance in statistics, *Proceedings National Institute of Science of India* 2 (1) (1936) 49–55.
- [35] A. Landström, M. J. Thurley, Adaptive morphology using tensor-based elliptical structuring elements, *Pattern Recognition Letters* 34 (12) (2013) 1416 – 1422. doi:http://dx.doi.org/10.1016/j.patrec.2013.05.003.
- [36] P. Soille, *Morphological Image Analysis*, Springer-Verlag, 1999.
- [37] J. Debayle, J. Pinoli, Spatially adaptive morphological image filtering using intrinsic structuring elements, *Image Anal. Sterol.* 24 (2005) 145–158.
- [38] R. Lerallut, E. Decenciere, F. Meyer, Image filtering using morphological amoebas, *Image Vision Comput.* 25 (4) (2007) 395–404.
- [39] P. Perona, J. Malik, Scale-space and edge detection using anisotropic diffusion, *IEEE Trans. Pattern Anal. Machine Intell.* 12 (7) (1990) 629–639.
- [40] Q. Huynh-Thu, M. Ghanbari, Scope of validity of psnr in image/video quality assessment, *Electronics Letters* 44 (13) (2008) 800–801.
- [41] Z. Wang, A. C. Bovik, H. R. Sheikh, E. P. Simoncelli, Image quality assessment: from error visibility to structural similarity, *IEEE Transactions on Image Processing* 13 (4) (2004) 600–612.

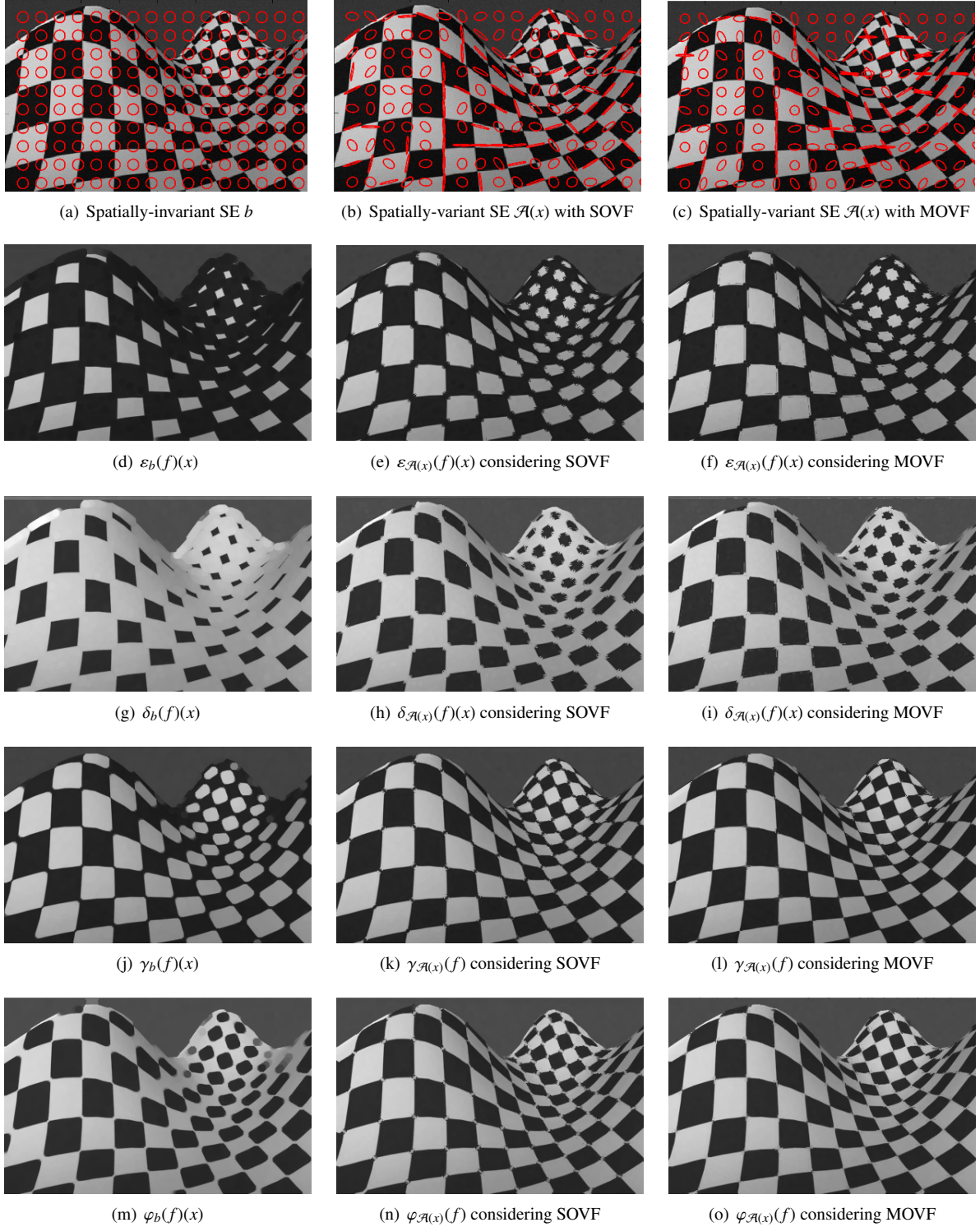
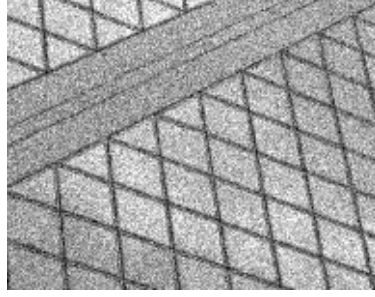
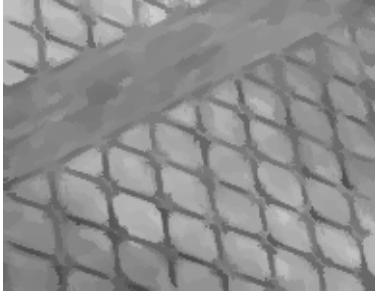


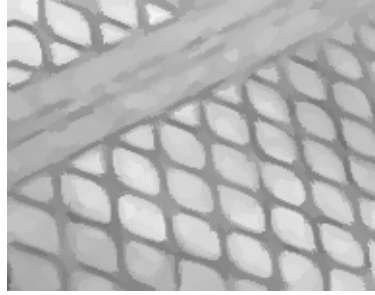
Figure 6: Comparison of spatially-invariant morphological operators versus their spatially-variant counterparts. First row shows the spatially-invariant structuring element b in (a), the spatially-variant structuring element $\mathcal{A}(x)$ provided by a single orientation vector field in (b), and provided by a multiple orientation vector field in (c). First column contains (d) the spatially-invariant erosion $\varepsilon_b(f)(x)$, (g) dilation $\delta_b(f)(x)$, (j) opening $\gamma_b(f)(x)$ and (m) closing $\varphi_b(f)(x)$. Second and third columns contain (e)-(f) the spatially-variant erosion $\varepsilon_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$, (h)-(i) dilation $\delta_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$, (k)-(l) opening $\gamma_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$ and (n)-(o) closing $\varphi_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$ considering, respectively, single and multiple orientation vector fields.



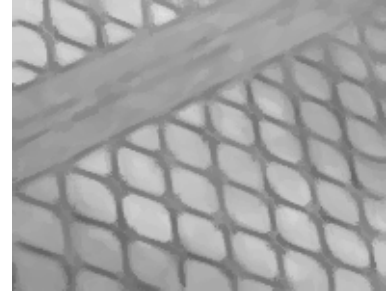
(a) Input image with Gaussian white noise



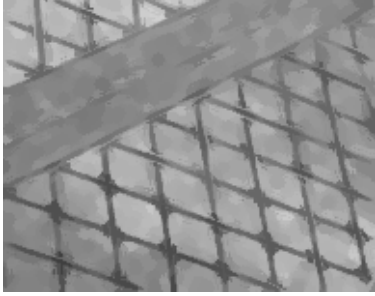
(b) $CO_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$ considering SOVF



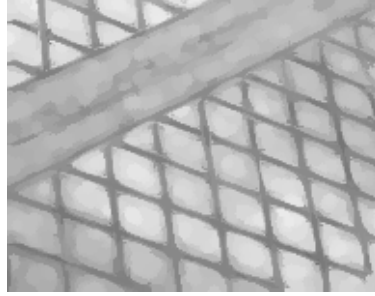
(c) $OC_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$ considering SOVF



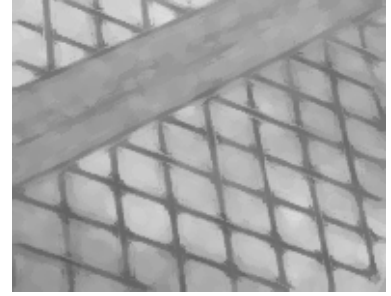
(d) $\Xi_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$ considering SOVF



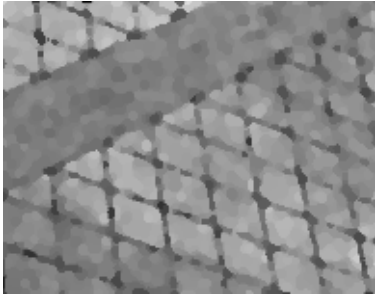
(e) $CO_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$ considering MOVF



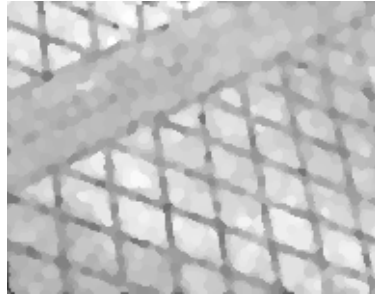
(f) $OC_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$ considering MOVF



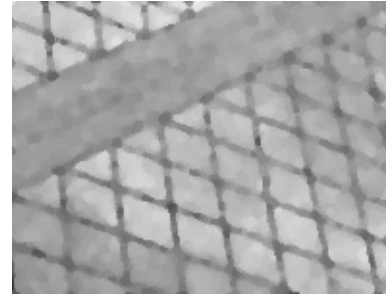
(g) $\Xi_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$ considering MOVF



(h) Bilateral $CO_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$

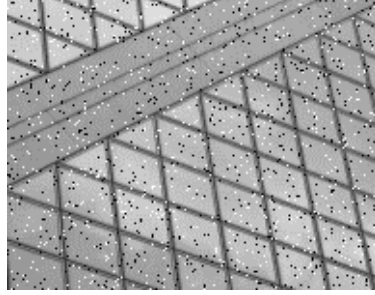


(i) Bilateral $OC_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$



(j) Bilateral $\Xi_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$

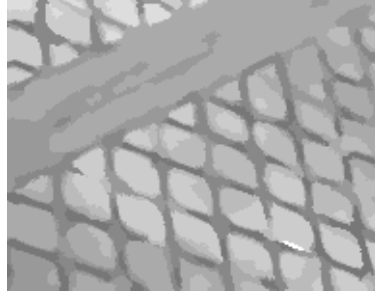
Figure 7: Comparison of adaptive morphological filters. The first row shows the input image corrupted with additive white Gaussian noise whose variance is $\sigma = 0.01$. The second row shows the filtered images using operators based on a single orientation vector field (SOVF), the third row contains the output of these filters considering a multiple orientation vector field (MOVF) and the fourth row shows the output of these filters considering the morphological bilateral approach. First column contains the outcomes of the adaptive close-open filter $CO_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$, second column shows the results of the adaptive open-close filter $OC_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$, and third column shows the alternate filter $\Xi_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$.



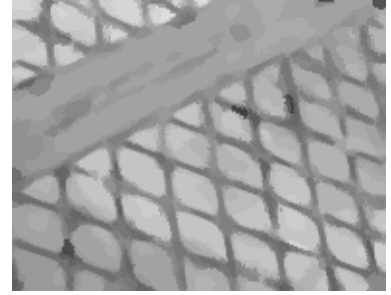
(a) Input image



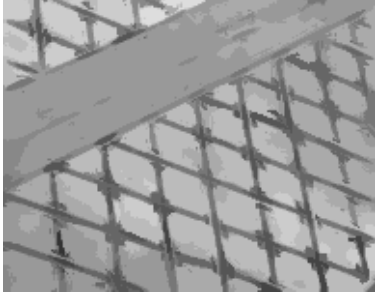
(b) $CO_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$ considering SOVF



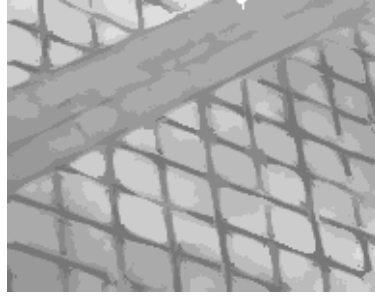
(c) $OC_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$ considering SOVF



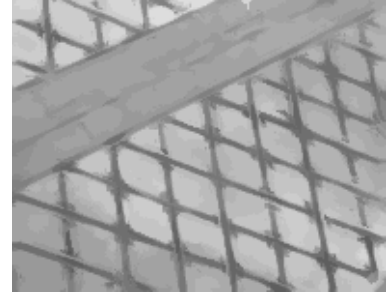
(d) $\Xi_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$ considering SOVF



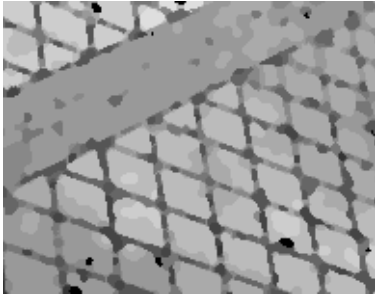
(e) $CO_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$ considering MOVF



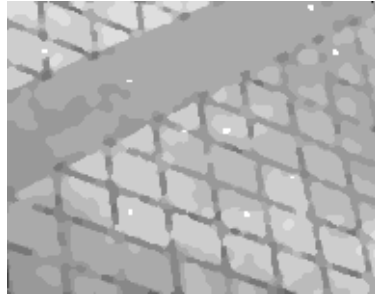
(f) $OC_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$ considering MOVF



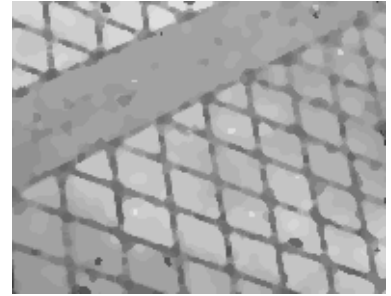
(g) $\Xi_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$ considering MOVF



(h) Bilateral $CO_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$



(i) Bilateral $OC_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$



(j) Bilateral $\Xi_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$

Figure 8: Comparison of adaptive morphological filters. The first row shows the input image where the 5% of its pixels has been corrupted by impulsive noise. The second row shows the filtered images using operators based on a single orientation vector field (SOVF), the third row contains the output of these filters considering a multiple orientation vector field (MOVF) and the fourth row shows the output of these filters considering the morphological bilateral approach. First column contains the outcomes of the adaptive close-open filters $CO_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$, second column shows the results of the adaptive open-close filters $OC_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$, and third column shows the alternate filters $\Xi_{\mathcal{A}(x)}(f)(x)$.

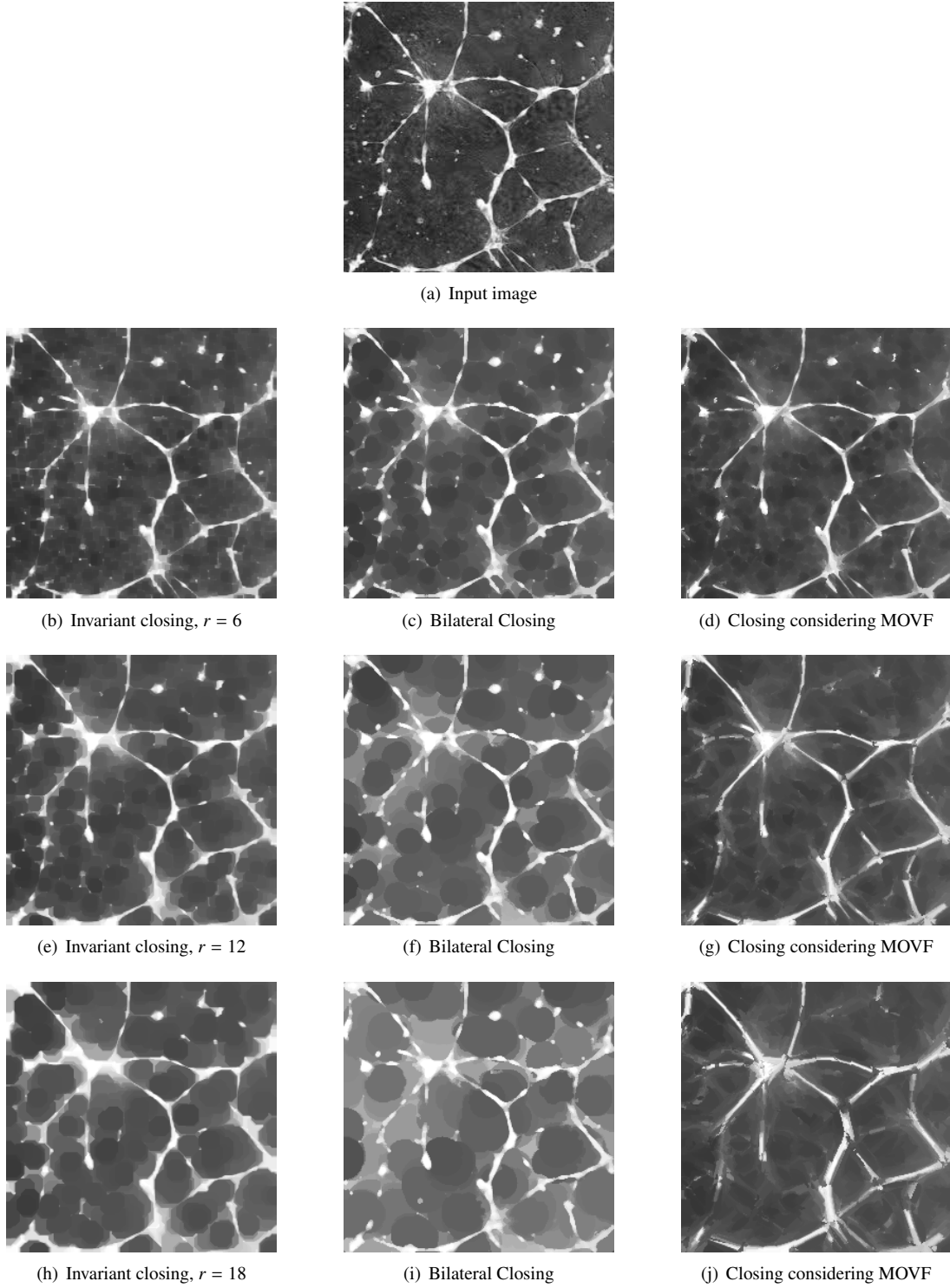


Figure 9: Comparison of closings with different sizes. (a) Input image: 256×256 gray level image of a cell. First column shows the results of the spatially-invariant closing $\varphi_b(f)(x)$ using disk with radius r equal to (b) 6 pixels, (e) 12 pixels and (h) 18 pixels. The second and third columns show, respectively, the results of the morphological bilateral closings and the spatially-variant closings considering a MOVF (the size of the adaptive structuring elements is detailed for each case in Section 3.3).